



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Stochastic amplitude modulation of nonlinear dispersive waves

Westdorp, R.W.S.

Citation

Westdorp, R. W. S. (2026, April 2). *Stochastic amplitude modulation of nonlinear dispersive waves*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/4300492>

Version: Publisher's Version

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/4300492>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Samenvatting

Dit proefschrift bestudeert het gedrag van golven onder invloed van verstoringen uit hun omgeving. Hoewel we ons richten op de *wiskundige* beschrijving van golven en hun theoretische gedrag, vindt deze beschrijving wel degelijk haar oorsprong in de realiteit. Men kan hierbij denken aan golven op het oppervlak van laagstaand water: golven die bijvoorbeeld ontstaan door een passerende boot op een gracht, en die ook nadat de boot verdwenen is nog lange tijd hun vorm behouden—tot steeds verder vermengen met de omgevende golven wanneer ze oneffenheden tegenkomen. De kracht van een wiskundige benadering is dat de inzichten niet beperkt blijven tot één specifieke situatie. Ze kunnen bovendien helder maken wat in experimenten lastig te onderscheiden is.

In dit proefschrift onderzoeken we hoe golven in dispersieve media, zoals water, in hoogte veranderen door realistische imperfecties. We modelleren die imperfecties als willekeurige verstoringen (ruis) en focussen hierbij op een bekend model uit de mathematische fysica: de Korteweg–de Vries vergelijking. Deze vergelijking is al sinds de 19e eeuw bekend vanwege de golfverschijnselen die zij beschrijft, en vormt nog altijd een basis voor moderne analyse van golven. Een bijzonder kenmerk van deze vergelijking is dat zij oplossingen heeft die golven voorspellen van verschillende hoogtes (amplitudes), waarbij hogere golven sneller reizen. Dit koppelt amplitude en snelheid op een directe manier—een interessant uitgangspunt voor het bestuderen van golfverstoring in een imperfecte omgeving.

Hoofdstuk 2 richt zich op de KdV-vergelijking met zogeheten multiplicatieve ruis: een willekeurige verstoring die direct invloed heeft op de golf. Hierdoor ondergaan de golven in het KdV-systeem grote veranderingen in hoogte en snelheid. De sleutel hierin is de rol van de energie van het systeem, die door de ruis voortdurend op en neer schommelt.

We introduceren in dit hoofdstuk een techniek om de positie en amplitude van zulke golven te traceren en te voorspellen. Deze “effectieve” positie en amplitude zijn kansprocessen: de ruis veroorzaakt immers willekeurige fluctuaties. Het idee is dat we steeds het golfprofiel zoeken dat het best past op de verstoorde golf. Perfect past het nooit; de verstoring vormt een “staart” achter de golf, vergelijkbaar met het kielzog van een boot. Onze techniek levert wiskundige vergelijkingen op die het verloop van amplitude, positie en staart beschrijven. Exact oplossen is onhaalbaar, zoals vaak bij niet-lineaire systemen, maar via computersimulaties en systematische benaderingen krijgen we inzicht in het voorspelde gedrag. Zo laten we zien dat een veelvoorkomende vorm van ruis gemiddeld een langzame gemiddelde stijging van

de amplitude veroorzaakt. Onze analyse voorspelt deze groei nauwkeurig, en deze voorspelling komt overeen met de simulaties.

In Hoofdstuk 3 onderzoeken we een meer fundamentele vraag: overleeft een golf de willekeurige verstoring überhaupt wel? Of breekt hij uiteindelijk, zoals een golf in de branding? En zo ja, na hoeveel tijd? Om deze vraag behapbaar te maken, bekijken we eerst een eenvoudiger situatie: in plaats van willekeurige ruis bestuderen we een vooraf vastgelegde, niet-willekeurige (deterministische) energieverandering in het medium. Dit vereenvoudigt de analyse aanzienlijk. We laten zien dat zolang toevoer of afvoer van energie langzaam genoeg gebeurt, golven langzame, maar grote amplitude veranderingen kunnen doorstaan zonder hun coherente vorm te verliezen. Dit inzicht vormt het fundament voor het bestuderen van willekeurige verstoringen.

In Hoofdstuk 4 keren we terug naar het willekeurige model van Hoofdstuk 2. Gebaseerd op de resultaten uit Hoofdstuk 3 laten we zien dat golven ook onder invloed van willekeurige ruis grote amplitudevariaties kunnen verdragen terwijl ze coherent blijven. Hiermee tonen we bovendien aan dat onze beschrijving van het effectieve amplitudeverloop uit Hoofdstuk 2 wiskundig valide is. De gebruikte technieken suggereren zelfs dat de golven nóg langer coherent blijven dan we strikt kunnen aantonen. Het kielzog strekt ver achter een verstoorde golf, maar blijft laag. Dat laatste is lastig wiskundig te bewijzen, en biedt ruimte voor vervolgonderzoek.

In Hoofdstuk 5 verlaten we het KdV-model en richten we ons op een verwant, maar discreet systeem: de Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou (FPUT) ketting, een model van massa's die via veren met elkaar zijn verbonden. Een soort oneindige ketting van kralen verbonden met elastiek. Het model heeft concrete toepassingen in de beschrijving van kristalroosters op moleculair niveau, waar atomen kunnen worden gemodelleerd als massa's die via veren met elkaar zijn verbonden. Ook in deze discrete context ontstaan golfachtige oplossingen: wanneer de massa's op een geschikte manier uit evenwicht worden gebracht, verplaatst de resulterende uitwijking zich met constante snelheid door de ketting. De connectie met de KdV-vergelijking is sterk: de volledige dynamica van de FPUT-ketting wordt door de KdV-vergelijking benaderd.

We bestuderen wat er gebeurt als de veren in de ketting niet identiek zijn, maar kleine willekeurige verschillen hebben in veerkracht. Ook hier onderzoeken we dus het effect van realistische oneffenheden op de voortplanting van golven. De verstoring heeft een langzaam maar duidelijk effect: de golven nemen af in hoogte en verliezen energie via een staart (kielzog) die achter de golf ontstaat. We berekenen expliciet hoe sterk deze amplitude afname is; de technieken uit de eerdere hoofdstukken blijken hiervoor uitstekend inzetbaar.

Samen laten deze hoofdstukken zien hoe kleine imperfecties — zowel willekeurig als deterministisch van aard — een langzame maar grote invloed kunnen hebben op de snelheid en amplitude van golven in dispersieve systemen. De in dit proefschrift ontwikkelde technieken bieden nieuwe manieren om zulke veranderingen te voorspellen. Ze laten bovendien zien dat deze golven verrassend robuust zijn en zelfs in realistische imperfecte omgevingen lange tijd kunnen overleven.