



Universiteit  
Leiden  
The Netherlands

## Quantum methods for machine learning and classical dynamics

Barthe, A.M.

### Citation

Barthe, A. M. (2026, March 20). *Quantum methods for machine learning and classical dynamics*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/4297482>

Version: Publisher's Version

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/4297482>

**Note:** To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Kwantumrekenen introduceert een nieuw rekenmodel dat de principes van de kwantummechanica benut om taken uit te voeren die naar verwachting niet efficiënt oplosbaar zijn voor klassieke computers. Dit proefschrift onderzoekt hoe deze ontwikkeling leeralgoritmen en de simulatie van klassieke fysische systemen kan beïnvloeden. De overkoepelende doelstelling is situaties te identificeren waarin kwantumcomputers een *bewijsbaar* voordeel bieden voor deterministische taken of leertaken.

Het eerste hoofdstuk plaatst het werk in de bredere context van de kwantuminformatica en formuleert drie leidende vragen: (i) wat zijn de minimale hulpbronnen voor universaliteit in *geparameteriseerde kwantummodellen*; (ii) hoe construeer je bewijsbare kwantum-leervoordelen; en (iii) wat is de computationele complexiteit van bosonische systemen en hoe verhouden die zich tot klassieke en qubit-gebaseerde computatie.

Het tweede hoofdstuk biedt achtergrond over kwantumrekenen, statistische leertheorie, bosonische Hamiltonianen, *Parameterized Quantum Circuits* (PQC's) en kwantumcomplexiteitsklassen.

In Hoofdstuk 3 bestuderen we *quantum data re-uploading* (QRU) modellen, d.w.z. *Parameterized Quantum Circuits* die de invoer herhaald herencoderen. We analyseren hun expressiviteit via het frequentiespectrum van de gerealiseerde functies: naarmate het aantal herencoderingen  $L$  toeneemt, concentreert het gemiddelde spectrum zich rond een Gaussische verdeling met breedte  $\propto \sqrt{L}$ , terwijl de support lineair groeit met  $L$ . In de praktijk induceert dit een inductieve bias naar gladdere functies—gunstig voor generalisatie, maar beperkend voor fijne details.

In Hoofdstuk 4 verschuiven we van begeleid leren naar generatieve modellering en introduceren *Expectation Value Samplers* (EVS): gegeven een circuit  $U(x)$  met willekeurige klassieke invoer  $x$  en een verzameling observabelen is de uitvoer de vector van hun verwachtingswaarden. We

bewijzen universaliteit op de hyperkubus  $[-1, 1]^M$  in twee regimes: (i) observabelen met constante spectrale norm op  $M$  qubits; (ii)  $\Theta(\log M)$  qubits met observabelen van norm  $\Theta(M)$ . Deze resultaten expliciteren de hulpbronnen-afruïl tussen het aantal qubits en de norm van de observabelen, wat direct doorwerkt in de shotcomplexiteit. We laten ook zien hoe EVS natuurlijk aansluit bij veeldeeltjesfysica en in welke situaties dit model passend is.

In Hoofdstuk 5 presenteren we een supervisietaak waarop een kwantumleerder aantoonbaar elke klassieke leerder overtreft onder standaard complexiteitsaannames. De sleutel is een routine voor *Fourier-coëfficiënt-extractie* die spectrale componenten van door PQC's geïnduceerde functies uitleest. Dit levert een feature-map op die klassiek moeilijk te berekenen is en leidt tot een PAC-scheiding. Via Trotterisatie vertalen we hetzelfde idee naar het *leren van Hamiltoniaanse dynamica* uit input-outputparen: efficiënt op een kwantumapparaat, maar klassiek moeilijk. De feature-map induceert tevens een kernel waarvan de Grammatrix efficiënt op een kwantumcomputer kan worden geëvalueerd.

In Hoofdstuk 6 ontwerpen we een kwantumalgoritme met continue variabelen (CV) voor gewone differentiaalvergelijkingen (ODE) binnen het *Koopman-von Neumann*-formalisme (KvN). KvN embedt een klassieke ODE als Hamiltoniaanse evolutie op een oneindig-dimensionale Hilbertruimte. Dit kader is van nature geschikt voor *initiële-distributieproblemen*, d.w.z. de evolutie van een volledige waarschijnlijkheidsdichtheid in plaats van individuele trajecten. We leiden de structuurconstanten van een relevante Lie-algebra af en compileren de Hamiltoniaanse evolutie met hogere-orde Trotterformules tot slechts drie poorttypen. Ten slotte tonen we hoe onzezekerheid in de beginvoorwaarden correspondeert met het *squeezing*-niveau van de initiële bosonische toestand.

In Hoofdstuk 7 onderzoeken we de complexiteit van het simuleren van grote *Gaussiaanse bosonische circuits*. Beperking tot een eenvoudige familie interferometers levert een beslissingsprobleem dat BQP-compleet is. Het toevoegen van gestructureerde *squeezing* verhoogt de rekenkracht en maakt het probleem PostBQP-moeilijk. Intuïtief kan *squeezing* samen met eenvoudige interferometrie postselectie-achtige effecten op verwachtingswaarden emuleren, wat de sprong in complexiteit verklaart. Dit hoofdstuk verdiept zo het begrip van de relatie tussen de complexiteit van het simuleren van exponentieel grote klassieke systemen en die van kwantumrekenen.