



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Spectral localisers and aperiodic topological phases in noncommutative geometry

Li, Y.

Citation

Li, Y. (2026, February 26). *Spectral localisers and aperiodic topological phases in noncommutative geometry*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/4293907>

Version: Publisher's Version

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/4293907>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Samenvatting

Het voorliggende proefschrift bestudeert verschillende computationele en modeleringstechnische problemen die verband houden met *topologische fasen van materie* binnen het kader van de *niet-commutatieve meetkunde*. In het volgende geven wij een korte inleiding tot de onderwerpen die in dit proefschrift aan bod komen.

Niet-commutatieve meetkunde

Meetkunde is de tak van de wiskunde die zich bezighoudt met eigenschappen van ruimten, zoals vorm, grootte en volume. In plaats van een ruimte op papier te tekenen, is het vaak handiger om haar *algebraïsch* te beschrijven. De eenheidscirkel in het vlak kan worden beschreven als de verzameling oplossingen van de vergelijking $x^2 + y^2 = 1$. Equivalent hieraan kan zij worden beschreven door de verzameling van alle polynomiale functies die erop gedefinieerd zijn. Dit komt overeen met een *commutatieve algebra* $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$. Commutativiteit betekent dat voor willekeurige polynomen f en g hun puntsgewijze vermenigvuldiging voldoet aan $fg = gf$.

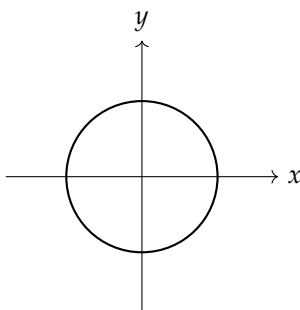


Figure 9.4.: De eenheidscirkel $x^2 + y^2 = 1$.

Daarentegen zijn *niet-commutatieve algebra's* waarin het product van

twee elementen niet noodzakelijk commutatief is: gegeven elementen $a, b \in A$ in een niet-commutatieve algebra A , geldt in het algemeen $ab \neq ba$. Dergelijke algebra's ontstaan op natuurlijke wijze in de kwantummechanica, dynamische systemen en de studie van singuliere ruimten. Hoewel niet-commutatieve algebra's in de gebruikelijke zin niet overeenkomen met "klassieke" meetkundige ruimten, vertonen zij analoge eigenschappen aan algebra's van functies. De *niet-commutatieve meetkunde* bestudeert dergelijke algebra's alsof zij de meetkunde coderen van "virtueel bestaande" ruimten.

C*-algebra's en K-theorie

De beroemde stelling van Gelfand–Naimark legt een één-op-één-correspondentie vast tussen ruimten en een bepaalde klasse van algebra's. Meer precies is de algebra van continue functies op een compacte Hausdorff-ruimte X een commutatieve, unitaire C*-algebra $C(X)$. De filosofie van de niet-commutatieve meetkunde suggereert daarom om *niet-commutatieve* C*-algebra's te bestuderen alsof zij *niet-commutatieve* ruimten zijn.

Een centraal thema in de wiskunde is de classificatie van objecten via invarianten die hun karakteristieke eigenschappen vastleggen. De *algebraïsche topologie* levert dergelijke hulpmiddelen voor ruimten, door hen te onderscheiden aan de hand van *topologische invarianten*, die onveranderd blijven onder continue vervormingen. Voorbeelden van topologische invarianten zijn de Euler-karakteristiek, het genus, of meer in het algemeen *homologiegroepen*. Zo kunnen een bol en een torus worden onderscheiden door hun genus (grotfweg het aantal gaten): de bol heeft genus nul, terwijl de torus genus één heeft.



Figure 9.5.: De bol (genus 0) en de torus (genus 1)

Voor niet-commutatieve ruimten die worden beschreven door C*-algebra's wordt de rol van algebraïsche topologie vervuld door de K-theorie. Aan een C*-algebra A worden twee abelse groepen geassocieerd, $K_0(A)$ en $K_1(A)$, de zogenoemde K-theorie groepen van A . Deze groepen leggen essentiële structurele

informatie van A vast en maken het mogelijk om C^* -algebra's te onderscheiden die niet *isomorf* zijn. In gunstige situaties levert de K -theorie een *volledige* classificatie binnen een gegeven klasse van C^* -algebra's, wat betekent dat twee zulke C^* -algebra's precies dan en slechts dan isomorf zijn wanneer zij dezelfde K -theorie hebben.

Het uitgangspunt van dit proefschrift is om C^* -algebra's te associëren aan *topologische materialen*, zodanig dat hun K -theorie fysisch waarneembare grootheden beschrijft, dat wil zeggen grootheden die gedetecteerd kunnen worden via experimentele metingen. Dit biedt een robuust kader voor het modelleren en analyseren van fysische systemen met niet-triviale topologische structuren.

Topologische fasen van materie

Een *toestand* of *fase* van materie verwijst naar een vorm van materie die homogeen is met betrekking tot zijn fysische of chemische eigenschappen. Een *faseovergang* beschrijft het proces waarbij een systeem van de ene fase overgaat naar een andere.

Volgens de theorie van Landau worden fasen van materie geclassificeerd aan de hand van hun symmetrieën, of preciezer, hun *ordeparameters*. Zo worden ijs en water onderscheiden doordat ijskristallen een hexagonale kristalstructuur bezitten, terwijl water een meer ongeordende vloeibare structuur heeft.

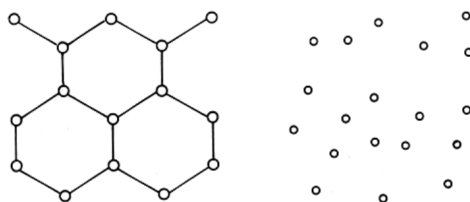


Figure 9.6.: Verschillende fasen van H_2O .

Bepaalde exotische fasen van materie (aangeduid als *topologische materie* of *topologische materialen*) kunnen echter niet op deze manier worden gekarakteriseerd, maar worden juist onderscheiden door hun *topologische invarianten*. Deze invarianten hebben directe fysische betekenis, aangezien zij overeenkomen met *macroscopische* waarneembare grootheden in fysische experimenten. De ontdekking van dergelijke topologische effecten is bekroond met meerdere Nobelprijzen voor de natuurkunde, waaronder die voor het gehele quantum Hall-effect (1985),

het fractionele quantum Hall-effect (1998), en meest recent het Josephson-effect (2025).

De fundamentele wiskundige bijdrage van Bellissard in de jaren tachtig was een formulering van dergelijke topologische invarianten binnen het kader van C^* -algebra's en K-theorie. De waarneembare grootheden van een topologisch materiaal genereren een niet-commutatieve C^* -algebra, de zogenoemde *C^* -algebra van observabelen*, waarvan de K-theorie de topologische invarianten van het systeem codeert.

Bijdragen van het werk

We hebben gezien dat de algebraïsche topologie van niet-commutatieve ruimten niet een louter wiskundige abstractie is, maar zich concreet manifesteert in experimenteel meetbare fysische eigenschappen. In de praktijk worden we echter vaak geconfronteerd met bijkomende uitdagingen.

- (1) **Computation:** Fysische metingen worden beperkt door een eindige energieresolutie en ruimtelijke schaal, waardoor in numerieke simulaties slechts eindige spectrale data beschikbaar is. Dit levert aanzienlijke uitdagingen op voor de berekening van topologische invarianten.
- (2) **Modellering:** Realistische fysische systemen bestaan uit een groot aantal deeltjes en dragen enorme hoeveelheden informatie. Het extraheren van relevante topologische kenmerken uit dergelijke systemen vereist effectieve en robuuste modellen.

Het proefschrift biedt nieuwe instrumenten en inzichten om deze uitdagingen aan te pakken. Het eerste deel ontwikkelt een abstract wiskundig raamwerk voor het berekenen van topologische invarianten van kwantumsystemen met behulp van eindige spectrale data, en verschaft een conceptuele basis voor de *spectral localiser* geïntroduceerd door Loring en Schulz-Baldes. Hiertoe maken we gebruik van *E-theory*, een bivariante K-theorie geïntroduceerd door Connes en Higson. Dit resultaat breidt het toepassingsgebied van de spectral localiser uit naar de context van Hilbert C^* -modulen. In het bijzonder maakt dit eindig dimensionale berekeningen van topologische invarianten geassocieerd met families van operatoren mogelijk.

Het tweede deel van het proefschrift richt zich op C^* -algebraïsche modellen van aperiodische topologische materialen. We beschrijven expliciete afbeeldingen tussen verschillende modellen, zodat deze modellen op rigoreuze wijze met

elkaar kunnen worden vergeleken. Vanuit fysisch perspectief levert dit een karakterisering op van de *robustheid* van topologische fasen en hun invarianten. Dit leidt tot een onderscheid tussen *sterke* en *zwakke* topologische fasen, aan de hand van hun stabiliteit onder verstoringen. Daarnaast geven we alternatieve dynamische beschrijvingen van het C^* -algebraïsche model van eendimensionale aperiodische topologische materialen, en interpreteren wij het Cuntz–Pimsner-model van Bourne en Mesland als een topologische graaf- C^* -algebra.

We introduceren een inductieve limiet- C^* -algebra, de *symmetry-breaking Roe C^* -algebra*, als een C^* -algebraïsch model dat de symmetriebrekende processen van roosters codeert. De K-theorie van deze C^* -algebra omvat zowel sterke als zwakke topologische fasen, en onderscheidt deze via hun deelbaarheid. Dit stelt ons in staat sterke topologische fasen te interpreteren als precies die fasen die invariant zijn onder symmetriebreking. Fysisch betekent dit dat deze fasen onafhankelijk zijn van de specifieke partitionering van het onderliggende materiaal.