



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Tautological relations and double ramification cycles with spin parity

Politopoulos, G.

Citation

Politopoulos, G. (2025, December 12). *Tautological relations and double ramification cycles with spin parity*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/4285021>

Version: Publisher's Version

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/4285021>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Samenvatting

Moduliruumtes ontstaan als oplossingen voor classificatieproblemen (*moduliproblemen*): gegeven een soort meetkundig object (zoals driehoeken, of lijnen door de oorsprong in het vlak), wil men al deze objecten parametriseren tot op isomorfisme. De resulterende parameterruimte, wanneer die bestaat, heet een moduliruumte. Naïef gezien is een moduliruumte een “wiskundige kaart” van het geheel van de meetkundige objecten waar we geïnteresseerd in zijn. Net zoals in een wereldkaart, waar elk punt op de kaart correspondeert met een punt in de wereld, correspondeert elk punt in een moduliruumte met een specifiek isomorfismeklasse van de objecten die we willen classificeren. We geven deze kaart een meetkundige structuur, en door het te bestuderen krijgen we een overzicht van alle meetkundige objecten waar we geïnteresseerd in zijn.

Als wiskundigen komen we moduliruumtes tegen zonder ze expliciet als moduliruumtes te benoemen. Enkele voorbeelden zijn de projectieve ruimte $\mathbb{P}^n$, die lijnen door de oorsprong in $\mathbb{C}^{n+1}$ parametrizeert, en meer algemeen de Grassmanniaan $\text{Gr}(k, V)$, die k -dimensionale deelruimtes van een n -dimensionale vectorruimte V parametrizeert. In dit proefschrift zijn we geïnteresseerd in *complexe algebraïsche krommen*: een-dimensionale objecten gedefiniëerd door polynomiale vergelijkingen over $\mathbb{C}$. Gladde algebraïsche krommen zijn geclassificeerd door een topologische invariant genaamd het *geslacht*. Complexe algebraïsche krommen en Riemann-oppervlakken zijn twee kanten van dezelfde medaille. Vanuit dit perspectief representeert het geslacht het *aantal gaten* van een complexe algebraïsche kromme, gezien als topologisch oppervlak.

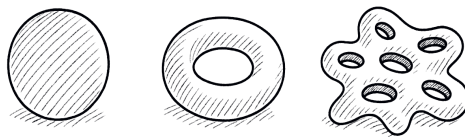


Figure A.2: Van links naar rechts, een geslacht 0, een geslacht 1, en een geslacht 6 complexe algebraïsche kromme.

De moduliruumte van gladde algebraïsche krommen van geslacht g , genoteerd met $\mathcal{M}_g$, was al bekend bij Riemann, die de dimensie berekende en de term “moduli” bedacht. De moduliruumte $\mathcal{M}_g$ is niet compact omdat families van gladde krommen kunnen degenereren naar nodale krommen, bijvoorbeeld door een cykel te krimpen om een singulier punt te krijgen. Om deze limieten te vangen construeerden Deligne en Mumford een compactificatie, genaamd $\overline{\mathcal{M}}_g$, die ook singuliere *stabiele krommen* bevat, dat is, nodale complexe algebraïsche krommen met eindige automorfismegroep.

Soms, om enumeratieve vragen te beantwoorden of om families van rationale of elliptische krommen te rigidificeren, introduceren we *gemarkeerde punten* op stabiele krommen, dat is, gladde punten op stabiele krommen. Op deze manier krijgen we de *moduliruimte van stabiele krommen van geslacht g met n gemarkeerde punten*, die we noteren als $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

Vanuit het perspectief van *snijtheorie*, zijn we geïnteresseerd in de *Chow-ring* van een moduliruimte. De Chow-ring van een algebraïsche variëteit X , genoteerd met $A^*(X)$, encodeert de meetkundige eigenschappen van de deelvariëteiten, door te vangen hoe ze elkaar doorsnijden. Deze ring laat ons deelvariëteiten “optellen” en “vermenigvuldigen” om hun doorsnedes binnen de omhullende ruimte te bestuderen. Zoals Mumford stelde in zijn invloedrijk artikel [Mum83, Section 4], “Als een variëteit of topologische ruimte gedefinieerd is door een bepaalde universele eigenschap, verwacht men dat dankzij deze eigenschap, het zekere cohomologie- (of Chow-)klassen heeft, genaamd *tautologische klassen*.” In het geval van de Grassmanniaan, bijvoorbeeld, bepalen deze tautologische klassen de volledige structuur van $A^*(\text{Gr}(k, V))$, in termen van voortbrengers en relaties. De *tautologische ring* van een moduliruimte X is de deelring voortgebracht door de tautologische klassen. In tegenstelling tot de situatie bij de Grassmanniaan, is de tautologische ring van $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ in het algemeen niet gelijk aan de gehele Chow ring. Het centrale doel is om de tautologische ring volledig te begrijpen in termen van voortbrengers en relaties. Een verzameling voortbrengers, de *gedecoreerde strata klassen*, is gevonden door Graber-Pandharipande. Een expliciet vermoeden voor een volledige verzameling relaties was 15 jaar geleden voorgesteld door Aaron Pixton, maar is vooralsnog open.

Dit proefschrift behandelt twee vraagstukken over de tautologische ring van de moduliruimte van krommen $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Het eerste gaat over een uitdrukking van de Hodge-klassen, of λ -klassen, in de tautologische ring. De *Hodge-bundel*

$$\overline{\mathcal{H}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$$

is een vectorbundel van rank g over $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ wiens vezel over een stabiele kromme $(C, p_1, \dots, p_n)$ met n gemarkeerde punten van geslacht g de ruimte $H^0(C, \omega_C)$ van secties van de canonieke bundel ω_C is. De klasse λ_i is gedefinieerd als de i 'de Chern klasse van deze vectorbundel. De λ -klassen zijn van fundamenteel belang in verschillende contexten, en zijn zeer grondig bestudeerd. Mumford was de eerste om expliciete uitdrukking van de λ -klassen in de tautologische ring te produceren. Sindsdien is geen andere systematische methode gevonden om *alle* λ -klassen uit te drukken in de tautologische ring. Om zulke uitdrukking te vinden, gebruiken we in Hoofdstuk 2, samen met Adrien Sauvaget, een extra moduliruimte, de *geprojectiviseerde Hodge-bundel* $\mathbb{P}\overline{\mathcal{H}}_{g,n}$, voortbouwend op de gedetailleerde analyse van Sauvaget [Sau19]. In ons artikel [PS25] gebruikten we deze resultaten om een systematische aanpak te ontwikkelen voor het uitdrukken van de λ -klassen in termen van een specifiek soort gedecoreerde strata klassen.

Theorem (2.1.2). *De $(g - i)$ 'de Chern-klasse van de Hodge-bundel, λ_{g-i} , kan worden uitgedrukt als een lineaire combinatie van de gedecoreerde strata klassen van grafen met geslacht maximaal i . Specifiek kan de klasse λ_g uitgedrukt worden in gedecoreerde strata klassen van bomen.*

Het tweede vraagstuk dat we behandelen gaat over twee zeer gerelateerde concepten: de *dubbele vertakkingscykel*, genoteerd met $\text{DR}_g(a, k)$, en de *klasse van de stratum van k -differentialen van type a* , genoteerd met $[\overline{\mathcal{M}}_g(a, k)]$. Beide zijn elementen van de Chow-ring $A^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ gedefinieerd via twee numerieke parameters: een geheel getal $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ en een vector van gehele getallen $a := (a_i)_{i=1}^n \in \mathbb{Z}^n$ met $|a| := \sum_{i=1}^n a_i = k(2g - 2 + n)$. Het startpunt van beide constructies is dezelfde: de *stratum*

van k -differentialen van type a

$$\mathcal{M}_g(a, k) := \left\{ (C, p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{M}_{g,n} \mid \mathcal{O}_C \left(\sum_{i=1}^n a_i p_i \right) \cong \omega_{\log}^k \right\}. \quad (\text{A.7})$$

Voor zekere keuzes van (a, k) zijn dit deelruimtes van $\mathcal{M}_{g,n}$ die gladde krommen parametriseren die een k -differential hebben met nulpunten en polen voorgeschreven door de vector van gehele getallen a . De dubbele vertakkingscykel is een klasse in $A^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ geassocieerd met een compactificatie van $\mathcal{M}_g(a, k)$ binnen $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, terwijl de klasse van een stratum van differentiaal de klasse is geassocieerd met de Zariski-afsluiting van $\mathcal{M}_g(a, k)$, genoteerd met $[\overline{\mathcal{M}}_g(a, k)]$. Recent is de klasse $[\overline{\mathcal{M}}_g(a, k)]$ uitgedrukt in termen van standaard voortbrengers van de tautologische ring via de theorie van dubbele vertakkingscyclen door twee uitdrukking van $\text{DR}_g(a, k)$ te bewijzen: de *stergraafuitdrukking* en *Pixtons formule*, namelijk

$$\text{stergraafuitdrukking} = \text{DR}_g(a, k) = \text{Pixtons formule}.$$

Deze aanpak werd in [FP18] voorgesteld voor $k = 1$ en gegeneraliseerd in [Sch18] voor $k > 1$. Deze uitdrukkingen zijn bewezen in een serie aan artikelen [JPPZ17, HS21, BHP⁺23].

Voordat we de resultaten uit Hoofdstuk 3 presenteren, introduceren we een ander centraal concept uit dit proefschrift. Een *spinstructuur* op een gladde kromme C van geslacht g over een algebraïsch gesloten lichaam is een paar $(\mathcal{L}, \phi)$ waar $\mathcal{L} \rightarrow C$ een lijnbundel is van graad $g-1$ en ϕ een isomorfisme $\phi: \mathcal{L}^{\otimes 2} \rightarrow \omega_C$. De *pariteit* van een spinstructuur is gedefinieerd als de pariteit van de dimensie van de ruimte van secties van $\mathcal{L}$. Specifiek, we noemen een spinstructuur *even* als $h^0(C, \mathcal{L}) \equiv 0 \pmod{2}$ en anders *oneven*. Mumford liet zien dat, gegeven een familie van gladde krommen $C \rightarrow S$ en een lijnbundel $\mathcal{L} \rightarrow C$ van relative graad $g-1$ samen met een isomorfisme $\mathcal{L}^{\otimes 2} \rightarrow \omega_{C/S}$, de functie

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ s &\mapsto h^0(C_s, \mathcal{L}_s) \pmod{2}, \end{aligned}$$

die een punt $s \in S$ stuurt naar de pariteit van de spinstructuur $\mathcal{L}_s$ op de vezel C_s , lokaal constant is. Anders gezegd, de pariteit van een spinstructuur is invariant onder deformaties. Als gevolg splitst de moduli ruimte van spinstructuren op gladde krommen, genoteerd met $\mathcal{M}_{g,n}^{1/2}$, in twee componenten

$$\mathcal{M}_{g,n}^{1/2} = \mathcal{M}_{g,n}^{1/2,+} \sqcup \mathcal{M}_{g,n}^{1/2,-},$$

waar de ruimtes met exponenten $+$, $-$ respectievelijk even en oneven spinstructuren parametriseren. Cornabla construeerde een compactificatie $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{1/2}$ van $\mathcal{M}_{g,n}^{1/2}$ door bepaalde nodale degeneraties te introduceren, en bewees dat deze compactificatie de pariteitsplitsing respecteert, ook op de rand.

Terugkomend naar het onderwerp van dit proefschrift, zien we dat als $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ *oneven* is en $a \in \mathbb{Z}^n$ een vector van oneven gehele getallen, aan elk punt $(C, p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{M}_g(a, k)$ een canonieke spinstructuur geassocieerd is. Om precies te zijn,

$$(C, p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{M}_g(a, k) \Rightarrow \omega_{\log}^{\frac{1-k}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i - 1}{2} p_i \right) \text{ is een spinstructuur.}$$

Dus we krijgen een splitsing

$$\mathcal{M}_g(a, k) = \mathcal{M}_g(a, k)^+ \sqcup \mathcal{M}_g(a, k)^-$$

in termen van punten wiens geassocieerde spinstructuur even of oneven is. Een dergelijke splitsing impliceert dat

$$[\overline{\mathcal{M}}_g(a, k)] = [\overline{\mathcal{M}}_g(a, k)^+] + [\overline{\mathcal{M}}_g(a, k)^-]$$

in $A^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$. Zoals eerder genoemd is de klasse $[\overline{\mathcal{M}}_g(a, k)]$ al berekend in termen van standaard voortbrengers van de tautologische ring. Echter, hoe zit het met de losse termen $[\overline{\mathcal{M}}_g(a, k)^+]$ en $[\overline{\mathcal{M}}_g(a, k)^-]$? Zijn ze zelf tautologisch? Als dat zo is, kunnen we ze dan berekenen in termen van standaard voortbrengers van de tautologische ring? Omdat de som van de twee termen al berekend is, is het genoeg om het verschil te berekenen. We definiëren de *spinklasse van de stratum van k-differentiaal van type a* als

$$[\overline{\mathcal{M}}_g(a, k)]^\pm := [\overline{\mathcal{M}}_g(a, k)^+] - [\overline{\mathcal{M}}_g(a, k)^-].$$

Met als doel de berekening van $[\overline{\mathcal{M}}_g(a, k)]^\pm$, definieerden Costantini-Sauvaget-Schmitt een tautologische klasse genaamd de *spin dubbele vertakkingscykel*, genoteerd met $\text{DR}_g^\pm(a, k)$, door een spinversie van Pixton's formula op te schrijven. Gemotiveerd door het niet-spin geval hierboven beschreven, stelden ze een vermoeden op, [CSS21, Conjecture 2.5], in een generalisatie van [FP18, Sch18]:

spinversie van Pixtons formule $:= \text{DR}_g^\pm(a, k) = \text{spinversie van stergraafuitdrukking}$.

In Hoofdstuk 3 is het hoofddoel om dit vermoeden te bewijzen. Eerst geven we een overzicht van de theorie van spinstructuren ontwikkeld door Cornalba, en we bewijzen enkele computationele resultaten. In Sectie 2 geven we een overzicht van de theorie van dubbele vertakkingscyclen en bestuderen we de meetkunde van deze klassen. Door de constructie van de klassieke dubbele vertakkingscykel $\text{DR}_g(a, k)$ te volgen [MW20, Hol21], geven we een *a priori* vermoedelijke meetkundige realisatie van $\text{DR}_g^\pm(a, k)$ aan de hand van het volgende stappenplan. Als eerste definiëren we een gesloten deelstack in een birationaal model $\rho_{\frac{1}{2}}: \overline{\mathcal{M}}_g^{1/2,a} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{1/2}$, de *dubbele vertakkingslocus*, en bekijken we diens fundamentaalklasse. Dan nemen we de pushforward van deze klasse naar $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{1/2}$ en doorsnijden we de klasse met de *pariteitscykel*, dat is, het verschil tussen het even en oneven component, en vervolgens nemen we de pushforward langs $\epsilon: \overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{1/2} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, de afbeelding die de spinstructuur vergeet.

De ruimte $\overline{\mathcal{M}}_g^{1/2,a}$ biedt een veel beter kader om in te werken. Aan het einde van Sectie 2 discussiëren we de relatie tussen de ruimtes in onze definitie en de ruimtes in de definitie van de gebruikelijke dubbele vertakkingscykel. Met deze analyse krijgen we een volledige beschrijving van de fundamentaalklasse van de dubbele vertakkingscyclen in termen van de irreducibele componenten en hun multipliciteiten. In Sectie 3 definiëren we een actie van μ_2 op de dubbele vertakkingslocus, die we gebruiken om bepaalde cancellaties te bewijzen na het voortduwen van de doorsnede met de pariteitscykel. Uiteindelijk, bouwend op deze resultaten, laten we in Sectie 4 zien dat onze definitie van $\text{DR}_g^\pm(a, k)$ gelijk is aan de spinversie van de stergraafuitdrukking. In Sectie 5 gebruiken we de theorie opgebouwd in [BHP⁺23] om te laten zien dat onze definitie van $\text{DR}_g^\pm(a, k)$ ook aan de spinversie van Pixtons formule voldoet. Als gevolg krijgen we dat onze definitie overeenkomt met de definitie voorgesteld door Costantini-Sauvaget-Schmitt, en daarmee bewijzen we tot slot het eerdergenoemde vermoeden [CSS21, Conjecture 2.5].

Theorem (3.5.12). *Zij $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ een oneven getal, en zij $a \in \mathbb{Z}^n$ een vector van oneven getallen met $|a| = k(2g - 2 + n)$. Dan is de cykel $\text{DR}_g^\pm(a, k)$ tautologisch en voldoet deze aan een spinversie van Pixtons formule.*

Theorem (3.4.5). *Onder de aannames van de stelling hierboven, samen met de aanname $a \notin k\mathbb{Z}_{>0}^n$, heeft de spin dubbele vertakkingscykel $\mathrm{DR}_g^\pm(a, k)$ ook een stergraafuitdrukking.*

In de Appendix laten we zien hoe dit vermoeden gebruikt kan worden om de klasse $[\overline{\mathcal{M}}_g(a, k)]^\pm$ te berekenen in termen van de standaardvoortbrengers van de tautologische ring. Hoofdstuk 3 en de aanpak in de Appendix zijn deel van gezamenlijk werk met Adrien Sauvaget en David Holmes.