



Universiteit  
Leiden  
The Netherlands

## Opinion dynamics on random graphs

Capannoli, F.

### Citation

Capannoli, F. (2025, November 19). *Opinion dynamics on random graphs*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/4283502>

Version: Publisher's Version

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/4283502>

**Note:** To cite this publication please use the final published version (if applicable).

# Samenvatting

Stel je voor dat je punten op een vel papier tekent, en pijlen die deze punten verbinden. De punten stellen de personen in een land voor, en de pijlen geven de kennisrelaties tussen hen weer. Aangezien de personen die we dagelijks tegenkomen door toeval worden bepaald, veronderstellen we dat de kennissen van elke persoon toevallig worden gekozen volgens een gegeven kansverdeling. Stel nu dat er politieke verkiezingen plaatsvinden in dit land, waaraan slechts twee partijen deelnemen. Iedere persoon heeft in de loop van de tijd een mening over op wie te willen stemmen, weergegeven op het papier door het bijbehorende punt ofwel blauw ofwel rood te kleuren. Elke persoon verandert op toevallige wijze van kleur in de loop van de tijd, afhankelijk van de invloed die hij of zij van kennissen ontvangt. Deze vereenvoudigde beschrijving leidt tot het zogenaamde “voter model”, dat evolueert op toevallige grafen. Het doel van dit proefschrift is om de evolutie van dit proces in de tijd te analyseren, het asymptotische gedrag van bepaalde relevante grootheden te bepalen, en interessante verschijnselen in kaart te brengen.

In Hoofdstuk 2 bestuderen we het standaard voter model op een klasse van ijle gerichte configuratiemodellen. Het belangrijkste resultaat betreft het asymptotische gedrag van de verdeling van de consensustijd op een typische realisatie van de graaf wanneer de grootte van de graaf naar oneindig groeit. Deze analyse wordt uitgevoerd door de ontmoetingstijden van willekeurige wandelingen te bestuderen, gestart vanuit stationariteit. Recente resultaten van Oliveira maken het mogelijk om deze grootheden aan elkaar te relateren, op voorwaarde dat de onderliggende rij van grafen aan bepaalde “mean-field-conditions” voldoet. Als gevolg van de volledige karakterisering van de verdeling van de ontmoetingstijden, geven we een nauwkeurige eerste-orde-benadering van de verwachtingswaarde hiervan, waaruit blijkt dat deze lineair is in de grootte van de graaf. De constante hierbij is een expliciete grootheid die afhangt van eenvoudige statistieken van de graadverdeling, en de expliciete kennis hiervan maakt het mogelijk om te onderzoeken hoe de regelmaat of variabiliteit van de graadverdeling een rol speelt in de verspreiding van meningen.

In Hoofdstuk 3 gebruiken we de resultaten uit Hoofdstuk 2 om ze uit te breiden naar een dieper niveau van analyse. Meer precies onderzoeken we de evolutie van de dichtheid van “discordant edges”, dat wil zeggen, de lijnen die knopen met tegengestelde meningen verbinden. Het belangrijkste resultaat van dit hoofdstuk is de afleiding van de precieze asymptotiek voor de verwachtingswaarde van de dicht-

heid van discordant edges over verschillende tijdschalen, variërend van de initiële tijdschaal tot de consensus tijdschaal. Op de eerste tijdschaal daalt de aanvankelijke dichtheid van meningsverschillen snel naar een bepaalde waarde. Voor elke tijdschaal tussen deze aanvankelijke daling en de consensustijd, stabiliseert het proces lange tijd rond een expliciete limietwaarde. Uiteindelijk, op de consensustijdschaal, vertoont de dichtheid van discordant edges een abrupte daling van het eerdere plateau naar nul, met een snelheid die samenvalt met de functionele vorm gevonden in Hoofdstuk 2 voor de verwachtingswaarde van de consensustijd. Dit volgt een diffusievergelijking.

In Hoofdstuk 4 analyseren we een variant van het voter model behandeld in Hoofdstukken 2 en 3, bestaande uit een niet-lineair opiniedynamisch model dat de interactie vastlegt tussen een externe verstorende bias die het aannemen van een nieuwe mening bevordert en een individuele koppigheid die de gehechtheid aan de oorspronkelijke mening bevordert. Deze wisselwerking wordt gemodelleerd door twee concurrerende parameters. We leveren een eerste resultaat op toevallige “out-regular” grafen, waarbij we, gebruikmakend van een mean-field-benadering waarin de onderliggende graaf bij elke stap onafhankelijk opnieuw wordt gesampled, een faseovergang met hoge waarschijnlijkheid identificeren. Voor vaste out-degree en koppigheidsparemeter stellen we het bestaan vast van een kritische drempelwaarde voor de verstorende bias, zodanig dat, boven de drempel de dynamica snel consensus op de blauwe mening bereikt, terwijl onder de drempel het systeem snel stabiliseert in een metastabiele toestand, gekarakteriseerd door een stabiele, niet-consensus verhouding van personen die de nieuwe mening aannemen. Dit metastabiele regime blijft voortbestaan op een tijdschaal die exponentieel is in de netwerk-grootte.

In Hoofdstuk 5 onderzoeken we verschillende vragen met betrekking tot het voter model op zowel gerichte als ongerichte toevallige graafmodellen, met de nadruk op graadverdelingen met zware staarten. We voeren een systematische numerieke studie uit en formuleren verschillende vermoedens op basis van wiskundige inzichten, waarbij we onderzoeken hoe de netwerktopologie, en met name de heterogeniteit in de knoopgraden, de evolutie van de opiniedynamica beïnvloedt. De belangrijkste bijdrage is een uitbreiding van de analyse van consensustijden naar gerichte toevallige grafen met toevallige gegeven graadverdelingen. Daarnaast evalueren we de geldigheid van mean-field-benaderingen binnen deze graaf-ensembles. Numerieke simulaties tonen aan dat deze benaderingen de verdeling van de consensustijd accuraat beschrijven, mits het onderliggende gerichte ensemble eindige gemiddelde graden heeft. In situaties met oneindige gemiddelde graden daarentegen treden er aanzienlijke afwijkingen op tussen de empirische verdeling van de consensustijden en de theoretische voorspellingen.