



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Spectral analysis of inhomogeneous network models

Malhotra, N.

Citation

Malhotra, N. (2025, November 20). *Spectral analysis of inhomogeneous network models*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/4283482>

Version: Publisher's Version

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/4283482>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Samenvatting

Dit proefschrift bestaat uit vijf hoofdstukken, waarvan er drie de kern van de wiskundige inhoud bevatten. We bestuderen limieten van spectrale verdelingen van toevallige graafmodellen met puntinhomogeniteiten. In het bijzonder richten we ons op de nabuur-matrix van de inhomogene Erdős–Rényi graaf in het ijle regime, en op de nabuur- en Laplace-matrices voor modellen die een ruimtelijke structuur bevatten.

Toevallige graafmodellen bieden een wiskundig kader voor het begrijpen van complexe netwerken in vakgebieden zoals natuurkunde, biologie, informatica en sociale wetenschappen. Het klassieke Erdős–Rényi-model, waarin lijnen onafhankelijk met gelijke waarschijnlijkheid worden toegevoegd, dient als een fundamenteel model dat diepgaande inzichten blijft opleveren. Spectrale grafentheorie speelt een sleutelrol in deze context, door de eigenwaarden en eigenvectoren van de nabuur- en Laplace-matrices van graafmodellen te verbinden met structurele en geometrische eigenschappen van graafmodellen. De stelling van Perron-Frobenius garandeert bijvoorbeeld een unieke grootste eigenwaarde voor de nabuur-matrix van een verbonden graaf, met een bijbehorende positieve eigenvector. Breder gezien geeft het spectrum informatie over de connectiviteit van de graaf, het aantal subgrafen van een bepaald type, het chromatische getal en andere topologische kenmerken. Laplace-eigenwaarden spelen een centrale rol in de studie van diffusie, mengtijden van toevallige wandelingen en spectrale clusteringalgoritmen. Met name de matrix-boomstelling van Kirchhoff relateert de determinant van de combinatorische Laplace-matrix aan het aantal opspannende bomen van de graaf. Deze verbindingen maken spectrale analyse een krachtig hulpmiddel voor het bestuderen van de geometrie van complexe netwerken. Hoofdstuk 1 biedt een gedetailleerde inleiding tot spectrale grafentheorie, toevallige grafen en toevallige matrices.

De spectra van de nabuur- en Laplace-matrices worden goed begrepen in het Erdős–Rényi-model in het dichte regime. In het ijle regime worden drie belangrijke analytische technieken gebruikt: (i) karakterisering van het limietspectrum via lokale zwakke limieten zoals Galton-Watson-bomen; (ii) het gebruik van combinatorische methoden en speciale symmetrische partities om de momenten van de limietspectraalmaat te berekenen; (iii) het afleiden van de Stieltjestransformatie van de limietmaat met behulp van een vaste-puntvergelijking in een

geschikte Banach-ruimte. In hoofdstuk 2 breiden we het Erdős-Rényi-model uit door deterministische puntgewichten te integreren om inhomogeniteit te introduceren, waarbij lijnen nu onafhankelijk worden toegevoegd met een waarschijnlijkheid evenredig met een functie van de puntgewichten. We bestuderen dit model in het ijle regime, waar de connectiviteitsfunctie begrensd is. We analyseren de empirische spectrale verdeling van de nabuur-matrix met behulp van de momentenmethode en de Stieltjestransformatie, en beschrijven de limietverdeling met behulp van homomorfismedichtheden, symmetrische partities en een vaste-puntvergelijking.

Netwerken vertonen vaak een ruimtelijke structuur naast puntinhomogeniteit. In hoofdstuk 3 beschouwen we een kernelgebaseerd toevallig graafmodel op een discrete torus, waarbij de punten zijn voorzien van toevallige gewichten die een machtswetverdeling volgen, en de verbindingskansen tussen twee punten afhangen van een functie van de twee gewichten die omgekeerd evenredig is met de torusafstand tussen de twee punten. Met behulp van de momentenmethode bestuderen we de nabuur-matrix van dit model en tonen we het bestaan en de uniciteit van een spectrale limietmaat aan. We analyseren de maat via zijn prelimiet om aan te tonen dat deze absoluut-continu en niet-ontaard is. We karakteriseren de Stieltjestransformatie van deze maat via een vaste-puntvergelijking. Wanneer de kernel rang-1 is, dat wil zeggen, een productstructuur heeft, identificeren we de limietmaat expliciet als een vrije multiplicatieve convolutie tussen de halvecirkelwet en de Pareto-wet, met behulp van hulpmiddelen uit de vrije kansrekening.

In hoofdstuk 4 richten we ons op de gecentreerde Laplace-matrix van het rang-1-model, ook wel bekend als het schaalvrije percolatiemodel. Met behulp van de momentenmethode tonen we het bestaan van een unieke spectrale limietmaat aan. We identificeren de maat verder aan de hand van de spectrale verdeling van enkele niet-commutatieve onbegrensde operatoren, wederom met behulp van technieken uit de vrije kansrekening.

In hoofdstuk 5 presenteren we simulaties en geven we een korte bespreking van voorbeelden die buiten de veronderstelde beperkingen van de voorgaande hoofdstukken vallen.