



Universiteit
Leiden

The Netherlands

Subproduct systems and C^* -algebras

Ge, Y.

Citation

Ge, Y. (2025, October 22). *Subproduct systems and C^* -algebras*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/4279616>

Version: Publisher's Version

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/4279616>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Samenvatting

In dit proefschrift bestuderen we voornamelijk *subproduct-systemen* en de daarmee geassocieerde C^* -*algebra's*. Om de inhoud toegankelijk te maken voor een breder publiek, geven we hier een intuïtieve uitleg van deze concepten.

Gegradeerde algebra en subproduct-systeem

In de wiskunde kunnen complexe structuren vaak beter worden begrepen door ze op te delen in eenvoudigere en geordende lagen. Dit is de kerngedachte achter een *gegradeerde algebra*. Allereerst is een *algebra* een wiskundige structuur waarin de begrippen optelling en vermenigvuldiging een rol spelen. De gehele, reële, rationale en reële getallen vormen algebra's, maar bijvoorbeeld ook verzamelingen van functies en matrices. Een algebra is *commutatief* als de vermenigvuldiging van twee elementen a en b in de algebra voldoet aan de regel $ab = ba$. Algebra's van getallen en functies zijn commutatief. Algebra's van matrices zijn niet commutatief: het is een bekend gegeven dat voor matrixvermenigvuldiging van matrices A en B , in het algemeen geldt dat AB niet gelijk is aan BA .

Een *gegradeerde algebra* is een algebra die is opgedeeld in lagen, de *gradering*, zodanig dat de optelling en vermenigvuldiging compatibel zijn met de *gegradering*. Een eenvoudig voorbeeld is de algebra van polynomen, waarbij

de gradering wordt gegeven door de graad van het polynoom. Algebra's van polynomen in variabelen die getallen voorstellen zijn commutatief.

Maar wat als we polynomen willen bestuderen in variabelen die geen getallen zijn, maar bijvoorbeeld matrices? Deze vraag leidt ons naar de studie van algebra's van *niet-commutatieve polynomen* in een meer algemene context. Een model voor zulke algebra's wordt gegeven door *subproduct-systemen*, een van de centrale concepten in dit proefschrift. Subproduct-systemen bieden een concreet raamwerk om dergelijke niet-commutatieve gegradeerde algebra's graad voor graad op te bouwen. Een subproduct-systeem $E = \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ kan worden beschouwd als een geordende verzameling van Hilbertruimten die de toegestane niet-commutatieve polynomen voor elke graad representeren. De ruimte E_1 wordt opgespannen door de voortbrengers, E_2 representeert de toegestane kwadratische combinaties, enzovoort.

Een speciale klasse van subproduct-systemen, de zogenaamde *kwadratische subproduct-systemen*, speelt een hoofdrol in dit proefschrift. In de taal van niet-commutatieve polynomen wordt een kwadratisch subproduct-systeem $E = \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gedefinieerd door een eenvoudige regel: alle relaties tussen de niet-commutatieve polynomen worden bepaald door de kwadratische relaties. Concreet wordt de volledige structuur gegeven door het orthogonale complement $E_1 \otimes E_1 \ominus E_2$.

C^* -Algebra's

In de wiskunde is een standaard manier om een topologische ruimte te begrijpen het bestuderen van de verzameling van continue functies op die ruimte. Zo kunnen bijvoorbeeld alle eigenschappen van de cirkel S^1 volledig worden herleid uit de algebraïsche structuur van zijn continue functies. Deze verzameling van continue functies, genoteerd als $C(S^1)$, is gesloten onder optelling, vermenigvuldiging en het nemen van de geconjugeerde, en vormt zo een commutatieve C^* -algebra.

Een C^* -algebra veralgemeniseert een dergelijk idee naar een niet-commutatieve context, d.w.z. de vermenigvuldiging is niet noodzakelijk commutatief. Een slogan in de niet-commutatieve meetkunde is om een C^* -algebra te be-

schouwen als de niet-commutatieve functies op een (niet-bestaande) niet-commutatieve ruimte. De stelling van Gelfand–Naimark maakt dit precies: elke commutatieve C^* -algebra kan concreet worden gerepresenteerd als een algebra van functies op een topologische ruimte. Algemener, niet-commutatieve C^* -algebra's, worden via de stelling van Gelfand–Naimark–Segal gegeven door algebra's van operatoren op een Hilbertruimte.

Gegeven een Hilbertruimte zijn we doorgaans geïnteresseerd in bepaalde concrete operatoren op deze ruimte. Het is in deze context natuurlijk om de kleinste C^* -algebra te bestuderen die deze operatoren bevat. Laat nu E een subproduct-systeem van eindig-dimensionale Hilbertruimten zijn en laat $\mathcal{F}_E$ de daarmee geassocieerde, oneindig-dimensionale, Fock-ruimte zijn. De elementen van E geven een familie van zogenaamde creatie-operatoren op de Fock-ruimte $\mathcal{F}_E$. Samen met de identiteitsoperator brengen zij de *Toeplitz-algebra* $\mathcal{T}_E$ voort, en dit is een van de C^* -algebra's die we in dit proefschrift bestuderen. Bovendien is in onze context de C^* -algebra van compacte operatoren $\mathcal{K}(\mathcal{F}_E)$ een ideaal binnen $\mathcal{T}_E$. De quotiënt- C^* -algebra $\mathcal{T}_E/\mathcal{K}(\mathcal{F}_E)$ (genoteerd als $\mathcal{O}_E$), de *Cuntz–Pimsner-algebra* genoemd, is een andere C^* -algebra die we in dit proefschrift onderzoeken.

K-theorie

Zodra we C^* -algebra's uit een subproduct-systeem hebben geconstrueerd, rijst een natuurlijke vraag: hoe kunnen we ze beschrijven? Twee van dergelijke C^* -algebra's kunnen er heel verschillend uitzien, maar toch "structureel equivalent" zijn. *Operator-K-theorie* biedt een hulpmiddel om de structuur van C^* -algebra's te classificeren.

Voor een C^* -algebra A associeert K-theorie er twee abelse groepen mee, namelijk $K_0(A)$ en $K_1(A)$. De K_0 -groep codeert informatie over de fundamentele bouwstenen (projecties), terwijl de K_1 -groep de rotatie-eigenschappen (unitairen) vat. Samen vormen ze een robuuste en berekenbare invariant van de C^* -algebra.

Neem de algebra van complexe getallen $\mathbb{C}$, de eenvoudigste C^* -algebra, als

voorbeeld. De K-theoriegroepen worden gegeven door

$$K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}, \quad K_1(\mathbb{C}) = 0.$$

Hier weerspiegelt $K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ dat elke projectie in een matrixalgebra over $\mathbb{C}$ wordt geclassificeerd door haar rang, een geheel getal. Het feit $K_1(\mathbb{C}) = 0$ volgt doordat alle inverteerbare matrices over $\mathbb{C}$ continu kunnen worden vervormd tot de identiteitsmatrix.

Door de K-theorie te berekenen van C^* -algebra's die voortkomen uit subproduct-systemen, kunnen we met elk subproduct-systeem twee abelse groepen associëren, die bepaalde eigenschappen van het subproduct-systeem weerspiegelen.

Bijdragen van dit proefschrift

Nu we subproduct-systemen, hun C^* -algebra's en K-theorie hebben geïntroduceerd, kunnen we de bijdragen van dit proefschrift beschrijven. De voornaamste bijdragen van dit proefschrift hebben betrekking op bepaalde kwadratische subproduct-systemen en hun Toeplitz- en Cuntz–Pimsner-algebra's.

Specifiek onderzoeken we drie operaties op kwadratische subproduct-systemen: *de vrije producten*, *de Segre-producten* en *de Veronese-machten*. Deze operaties zijn afkomstig uit de theorie van kwadratische algebra's en zijn compatibel met de structuur van kwadratische subproduct-systemen. Onze belangrijkste bijdragen zijn als volgt:

- (1) We geven een gedetailleerde beschrijving van de structurele eigenschappen van de nieuwe subproduct-systemen die uit deze operaties voortkomen.
- (2) Vervolgens berekenen we de K-theoriegroepen voor zowel de Toeplitz-algebra's $\mathcal{T}_E$ als de Cuntz–Pimsner-algebra's $\mathcal{O}_E$ geassocieerd met de subproduct-systemen geconstrueerd uit het vrije product en het Segre-product.

- (3) Verder verdiepen we ons in de analytische eigenschappen van de creatie-operatoren. Voor een specifieke klasse van subproduct-systemen (de Veronese-machten van wat bekend staat als p -reductieve systemen) onderzoeken we hun Schatten- p -klasse-eigenschappen. Dit wordt rechtstreeks gemotiveerd door het befaamde vermoeden van Arveson–Douglas, dat functionaalanalyse en algebraïsche meetkunde met elkaar verbindt. Onze resultaten dragen bij aan het verwerven van een beter begrip van dit vermoeden.

Samenvattend draagt dit proefschrift bij aan ons begrip van de niet-commutatieve meetkunde door nieuwe voorbeelden van subproduct-systemen te construeren en homologische eigenschappen van hun geassocieerde C^* -algebra's te berekenen. Het uitleggen van dergelijke onderzoeksresultaten kan een uitdaging zijn, maar ik hoop dat deze samenvatting een duidelijker gevoel geeft voor de kernconcepten van dit werk, alsook een idee van de problemen die wiskundigen op dit gebied momenteel bezighouden.