



Universiteit
Leiden
The Netherlands

CM-values of p -adic Theta-functions

Daas, M.A.

Citation

Daas, M. A. (2024, October 30). *CM-values of p -adic Theta-functions*.
Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/4106986>

Version: Publisher's Version

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/4106986>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Samenvatting

In de jaren 1980 bestudeerden Gross en Zagier de verschillen tussen singuliere moduli; de CM-waarden van Klein's j -functie. Bijvoorbeeld,

$$j\left(\frac{1+\sqrt{-43}}{2}\right) - j\left(\frac{1+\sqrt{-163}}{2}\right) = 2^{19} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 37 \cdot 433.$$

Ze bewezen dat deze getallen voorspelbare priemfactorisaties genieten en dat de priemgetallen die in deze uitdrukkingen voorkomen relatief klein en inert zijn in beide CM-lichamen in kwestie. Deze opmerkelijke eigenschappen gaven de aanzet tot een lange reeks aan wiskundige expedities die in de daaropvolgende decennia leidden tot vele diepgaande resultaten en cruciale ideeën in verschillende gebieden van de wiskunde, die wiskundigen tot op de dag van vandaag blijven inspireren.

We bewijzen een p -adische versie van het werk van Gross en Zagier over de verschillen tussen singuliere moduli door een vermoeden van Sofia Giampietro en Henri Darmon te bewijzen, die de factorisatie onderzochten van een rationale invariant geassocieerd met een paar CM-punten op een genus nul Shimura kromme, verkregen als de kruisverhouding van de CM-waarden van p -adische Θ -functies. Net als Gross en Zagier geven we twee bewijzen; een algebraïsch bewijs met behulp van CM-theorie, en ook een interessanter analytisch bewijs met behulp van p -adische infinitesimale deformaties van Hilbert Eisenstein-reeksen. Aangezien er geen expliciete formules zijn voor dit soort cuspidale p -adische vervormingen, berekenen we deze middels de Frobenius-sporen van de geassocieerde Galoisdeformatie en tonen we hun modulariteit aan middels een $R = T$ -stelling. Deze methode hoopt de kloof te overbruggen tussen de klassieke CM-theorie en de meer recente p -adische ontwikkelingen in de theorie van de reële vermenigvuldiging.

Hoofdstuk 1 behandelt de context waarin dit proefschrift geplaatst dient te worden. Het introduceert de nodige achtergrond over CM-theorie vanuit een adèlisch perspectief en de factorisatiestellingen van Gross en Zagier over de verschillen tussen singuliere moduli worden uitgelegd en toegelicht middels verschillende voorbeelden. We herinterpreteren hun resultaten in de taal van snijdingsgetallen van paren van embeddings en illustreren dit perspectief met een veelvoud aan voorbeelden. Zowel de algebraïsche als de analytische bewijzen van deze factorisatieresultaten worden geschetst.

In Hoofdstuk 2 introduceren we vervolgens een bepaalde klasse van Shimura krommen geassocieerd met indefiniëte rationale quaternionalgebra's. We schetsen enkele kerneigenschappen van deze krommen en beschrijven dan de vermoedens van Giampietro en Darmon met een focus op de parallellen met de resultaten van Gross en Zagier. Vervolgens bespreken we hoe de p -adische uniformisatie van Shimura krommen gebruikt kan worden om deze vermoedens p -adisch te benaderen, en we vertalen het vermoeden naar deze equivalente niet-archimedische context. We schetsen de algemene strategie voor het bewijs van deze kernresultaten en we behandelen de sterke overeenkomsten met recente vorderingen in de theorie van de reële vermenigvuldiging.

In Hoofdstuk 3 beschrijven we een bewijs dat de ideeën achter het oorspronkelijke algebraïsche bewijs van Gross en Zagier weerspiegelt, gebruikmakend van de moduli interpretatie van de Shimura kromme en de theorie van complexe vermenigvuldiging. We doen een beroep op het belangrijkste resultaat van het proefschrift van Andrew Phillips, die de graad van bepaalde verfijningen van de moduli stack van zogenaamde valse elliptische krommen berekende, gebruikmakend van ideeën van Howard en Yang. Met behulp van deze resultaten is het bewijs van Stelling A vrij eenvoudig.

De focus van deze scriptie ligt op ons bewijs van Stelling B. Hiervoor volgen we een algemene strategie uiteengezet in eerder werk van Darmon, Pozzi en Vonk. We bestuderen een p -stabilisatie van dezelfde Hilbert Eisenstein-reeks die gebruikt werd door Gross en Zagier. In die zin is ons werk een heus p -adisch analogon van hun werk. Dit tweede bewijs kan verdeeld worden in drie verschillende stappen, die we nu zullen behandelen en die de drie verschillende hoofdstukken reflecteren waaruit dit bewijs is opgebouwd.

In Hoofdstuk 4 herhalen we wat achtergrondinformatie over genus-theorie, iets wat Gauß reeds lang geleden ontwikkeld heeft. Middels klasselichamentheorie en groepencohomologie bewijzen we de exactheid

van een uiterst belangrijke rij. Vervolgens bewijzen we het bestaan van een kwadratische vorm die de gebruikelijke normvorm op een quaternionenalgebra verfijnt, en we geven hiervoor verschillende expliciete formules. We gebruiken dit om een algebraïsche constructie op te zetten die een bepaalde quaternion associeert met een ideaal in een bikwadratisch lichaam. Hieruit leiden we een bijectie af tussen quaternionen en bepaalde elementen in een reëel kwadratisch lichaam met een vast spoor. Hierdoor kunnen we de CM-waarden van p -adische Θ -functies op een betekenisvolle manier herschrijven in Sectie 6.1, waar we deze resultaten nodig hebben.

Anders dan in het werk van Gross en Zagier, is de $\mathbf{q}$ -expansie van een cuspidale p -adische familie die door de Hilbert Eisenstein-reeks gaat niet a-priori bekend. Daarom verkrijgen we zo'n familie door een rigidificatie van de ermee geassocieerde decomposeerbare representatie te vervormen. Om precies te zijn, zullen we alle bijna ordinare deformaties beschouwen; dat zijn alle deformaties waarvoor de decompositiegroepen van de twee priemenvoren p elk een aparte lijn vasthouden. Deze benadering vereist dat we de modulariteit van zulke deformaties bewijzen om te rechtvaardigen dat we hieruit de gezochte familie van modulaire vormen kunnen construeren.

Hoofdstuk 5 bewijst daarom een $R = T$ -stelling, waarvan een beroemd voorbeeld voorkwam in het bewijs van Wiles van de laatste stelling van Fermat. Hier duidt R de universele bijna ordinare deformatiering aan, en T Hida's cuspidale bijna ordinare Hecke-algebra. Gebruikmakend van vergelijkbare methoden als in de proefschriften van Pozzi en Betina en vele andere bronnen, en door fundamentele resultaten van Hida te gebruiken, construeren we een lift van de gerigidificeerde representatie naar de bijna ordinare Hecke-algebra, hoewel op sommige plekken extra zorg nodig is omdat sommige cohomologiegroepen 2-dimensionaal zijn, in plaats van 1-dimensionaal. Uit de vergelijking van de dimensies van de Hecke-algebra en de deformatiering volgt dan de gezochte $R = T$ -stelling.

Tenslotte beschouwen we in Hoofdstuk 6 een specifieke bijna ordinare deformatie en berekenen we expliciet de infinitesimale familie van deformaties van de Hilbert Eisenstein-reeks die ermee correspondeert. Na het nemen van de afgeleide naar de infinitesimale gewichtsparemeter van zijn diagonale restrictie en het toepassen van de p -adische ordinare projectieoperator, tonen we aan dat het resultaat identiek nul moet zijn. Uiteindelijk completeren we het bewijs van Stelling B door expliciet de Fouriercoëfficiënten van de meestal louter theoretisch gebruikte ordinare projectie te berekenen en de eerste van deze gelijk aan nul te stellen.

Appendix A geeft een korte introductie tot verschillende typen van modulaire vormen. Het veronderstelt de theorie van klassieke modulaire vormen als bekend voor de lezer, en legt uit hoe ze gezien kunnen worden vanuit een meer automorf perspectief. In de daaropvolgende secties veralgemeniseren we deze behandeling naar meer algemene modulaire vormen. Eerst veranderen we het grondlichaam van $\mathbb{Q}$ in een reëel kwadratisch lichaam. Tenslotte combineren we deze behandelingen en beschrijven we een adèlische benadering van Hilbert modulaire vormen en Hida families, omdat we die nodig hebben voor onze methoden in Hoofdstuk 6. Hiervoor verlaten we de archimedische wereld en beschouwen in plaats daarvan p -adische modulaire vormen.