The wild Brauer-Manin obstruction on K3 surfaces

Pagano, M.

Samenvatting

Dit proefschrift gaat over de studie van rationale punten op variëteiten. Dit soort problemen ontstaat uit de behoefte om de rationale oplossingen van een polynoom te kunnen beschrijven: gegeven een polynoom $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, wat kunnen we zeggen over

$$\mathrm{Z}(f)(\mathbb{Q}) := \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}^n \mid f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0\}?$$

Een manier om deze verzameling te bestuderen is door te kijken naar de polynoomvergelijking over de reële getallen. In feite, als er geen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ is zodat $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$, dan is $\mathrm{Z}(f)(\mathbb{Q})$ ook de lege verzameling. De reële getallen vormen een compleet lichaam, wat de studie van de nulpunten van functies die erover gedefinieerd zijn veel toegankelijker maakt. Echter, $\mathbb{R}$ is slechts een van de mogelijke complete lichamen van $\mathbb{Q}$, namelijk die met betrekking tot de euclidische metriek. De p-adische metrieken geven voor elke priemgetal p een compleet lichaam, dat $\mathbb{Q}$ bevat. Als we dit allemaal samenvoegen, krijgen we een natuurlijke inclusie

$$\mathrm{Z}(f)(\mathbb{Q}) \hookrightarrow \prod_{p \text{ priem}} \mathrm{Z}(f)(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{Z}(f)(\mathbb{R}).$$

Bovendien zijn de verzamelingen $\mathrm{Z}(f)(\mathbb{Q}_p)$ en $\mathrm{Z}(f)(\mathbb{R})$ deelverzamelingen van respectievelijk $\mathbb{Q}_p^n$ en $\mathbb{R}^n$, dus erven ze een topologie die voortkomt uit de topologie op $\mathbb{Q}_p$ en $\mathbb{R}$ respectievelijk. Ik ben met name geïnteresseerd in het begrijpen van de afsluiting van de verzameling $\mathrm{Z}(f)(\mathbb{Q})$ binnen het product $\prod_{p \text{ priem}} \mathrm{Z}(f)(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{Z}(f)(\mathbb{R})$.

In de taal van de algebraïsche meetkunde, definieert de nulpuntsverzameling van het polynoom f een variëteit X over de rationale getallen. Het grootste voordeel van het kijken naar het beeld van $X(\mathbb{Q})$ binnen $\prod_{p \text{ priem}} X(\mathbb{Q}_p) \times X(\mathbb{R})$ is dat de tweede gemakkelijker te begrijpen is. In feite hebben we zowel over $\mathbb{R}$ als over $\mathbb{Q}_p$ Newton-methoden die het mogelijk maken oplossingen voor polynoomvergelijkingen te construeren. Bovendien, als $X(Q)$ dicht is in $X(Q_p)$ voor een gegeven priemgetal p, dan krijgen we in combinatie met het lemma van Hensel dat we de oplossing modulo p kunnen liften naar oplossingen over de rationale getallen. Bijvoorbeeld in het geval van $Z(f)$, met $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, is een oplossing modulo p een n-tupel $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ zodat

$$f(\beta_1, \ldots, \beta_n) = 0 \mod p.$$

Helaas is het vaak te optimistisch om te hopen op de dichtheid van $X(\mathbb{Q})$ in $\prod_{p \text{ priem}} X(\mathbb{Q}_p) \times X(\mathbb{R})$.

In dit proefschrift werken we met gladde en propere variëteiten over getallenlichamen. In dit geval hebben we in plaats van de euclidische metriek de archimedische plaatsen, en in plaats van de p-adische metriek hebben we de niet-archimedische plaatsen die geassocieerd zijn met priemidealen in de ring van gehele getallen van k. We duiden met Ω_k de verzameling plaatsen van k aan en voor elke plaats $\nu \in \Omega_k$ duiden we met k_ν de completering van k bij ν aan.

In 1970 introduceerde Manin het gebruik van de Brauer groep van een variëteit X, om een deelverzameling $X(k_\Omega)^{\mathrm{Br}}$ te construeren van

$$\prod_{\nu \in \Omega_k} X(k_\nu) =: X(k_\Omega)$$

zodanig dat

$$X(k) \subseteq \overline{X(k)} \subseteq X(k_\Omega)^{\mathrm{Br}} \subseteq X(k_\Omega).$$

Het sleutelpunt is dat de Brauer-Manin verzameling een betere approximatie geeft van $X(k)$ binnen het product $X(k_\Omega)$ en zelfs als de constructie ervan ingewikkelder is dan die van $X(k_\Omega)$, het toegankelijker is dan de verzameling rationale punten $X(k)$. Stel dat de Brauer-Manin-verzameling niet leeg is. Als $\mathfrak{p}$ een priemgetal is zodanig dat

$$X(k_\Omega)^{\mathrm{Br}} = X(k_\mathfrak{p}) \times \prod_{\nu \neq \mathfrak{p}} Z$$

met $Z \subseteq \prod_{\nu \neq \mathfrak{p}} X(k_\nu)$. Dan zeggen we dat het priemideaal $\mathfrak{p}$ **geen rol speelt** in de Brauer–Manin-obstructie.

Mijn onderzoek is geïnspireerd door de volgende vraag.

Vraag. *Stel* $\mathrm{Pic}(\bar{X})$ *torsievrij en eindig voortgebracht. Welke priemgetallen kunnen een rol spelen in de Brauer–Manin-obstructie voor zwakke approximatie op* X*?*

Deze vraag is geïnspireerd door een vraag die oorspronkelijk gesteld werd door Swinnerton–Dyer; hij vroeg zich af of onder de aanname van de vraag de enige plaatsen die een rol kunnen spelen in de Brauer–Manin obstructie voor zwakke approximatie degene zijn met slechte reductie voor de variëteit. In grote lijnen, als X gedefinieerd is over de rationale getallen, is een priemgetal p van goede reductie voor X als we X kunnen definiëren door polynomen met gehele coëfficiënten waarvan de reductie modulo p een gladde variëteit definieert over het eindige lichaam $\mathbb{F}_p$. De wens is om alle priemgetallen te kunnen identificeren die een rol spelen in de Brauer–Manin-obstructie voor zwakke approximatie om zo de Brauer–Manin-verzameling te kunnen beschrijven.

Het tweede hoofdstuk van dit proefschrift is gewijd aan het presenteren van het eerste voorbeeld van een K3-oppervlak[2] gedefinieerd over $\mathbb{Q}$ waarin een priemgetal van goede reductie een rol speelt in de Brauer–Manin-obstructie voor zwakke approximatie.

Stelling. *Laat $X \subseteq \mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}}$ het projectieve K3-oppervlak zijn gedefinieerd door de vergelijking*

$$x^3y + y^3z + z^3w + w^3x + xyzw = 0.$$

Dan is het priemgetal 2 van goede reductie voor X en speelt het een rol in de Brauer–Manin-obstructie voor zwakke approximatie.

Op dit punt komen enkele natuurlijke vragen naar boven:

1. In het bovenstaande stelling is het priemgetal 2 van goede gewone reductie. Is de gewone voorwaarde nodig?

2. Wat gebeurt er over getallenlichamen?

Het beantwoorden van deze twee vragen is het doel van Hoofdstuk 3 en 4. In het bijzonder bewijs ik in Hoofdstuk 3 de volgende resultaten.

Stelling. *Laat X een K3-oppervlak zijn en $\mathfrak{p}$ een priemgetal van goede niet-gewone reductie voor X met $e_{\mathfrak{p}} \leq (p-1)$. Dan speelt het priemgetal $\mathfrak{p}$ geen rol in de Brauer–Manin-obstructie voor zwakke approximatie op X.*

In Hoofdstuk 4 laat ik zien dat de grens $e_{\mathfrak{p}} \leq (p-1)$ zoals vermeld in de bovenstaande stelling optimaal is.

Stelling. *Laat $\mathfrak{p}$ een priemgetal van goede gewone reductie zijn voor X van restklassekarakteristiek p. Stel dat de speciale vezel Y geen niet-triviale globale 1-vormen heeft, $\mathrm{H}^1(\bar{Y}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$ en $(p-1) \nmid e_{\mathfrak{p}}$. Dan speelt het priemgetal $\mathfrak{p}$ geen rol in de Brauer–Manin-obstructie voor zwakke approximatie op X.*

In hoofdstuk 4 laat ik ook zien dat de voorwaarde $(p-1) \nmid e_{\mathfrak{p}}$ in de laatste stelling voldoende maar niet noodzakelijk is.

Al deze resultaten gaan in de richting van een beter begrip van de Brauer–Manin-verzameling en dus van de verzameling rationale punten op variëteiten. In mijn resultaten ligt de nadruk op K3-oppervlakken, die een van de eerste soorten variëteiten zijn (in termen van complexiteit van de meetkunde) waarover heel weinig bekend is over de aritmetiek (d.w.z. de verzameling rationale punten).

[2]K3-oppervlakken zijn variëteiten die voldoen aan de aanname in de vraag.