Motivic invariants of character stacks

Vogel, J.T.

Samenvatting

Dit proefschrift bestudeert de meetkunde van representatievariëteiten en karakterstacks. Dit zijn ruimtes die de representaties van een eindig voortgebrachte groep Γ naar een algebraïsche groep G parametriseren. Om precies te zijn, de representatievariëteit parametriseert al zulke representaties, en de karakterstack tot op isomorfie. De eindig voortgebrachte groep Γ is doorgaans de fundamentaalgroep van een compacte differentieerbare variëteit M, in welk geval de representatievariëteit en karakterstack ook wel G-lokale systemen op M parametriseren. Dit proefschrift bevat een aantal methodes om deze ruimtes te bestuderen aan de hand van hun invarianten. Naast het geven van theoretische beschrijvingen, beoogt dit proefschrift ook om deze invarianten expliciet te berekenen. Gemotiveerd door deze toepassingen, ontwikkelen we een aantal nieuwe computationele hulpmiddelen.

In Hoofdstuk 1 geven we de nodige voorkennis over groepoïden en algebraïsche stacks, waarbij de nadruk ligt op quotiëntstacks en stabilisatoren. Deze theorie gebruiken we in Hoofdstuk 2, waar we een precieze definitie geven van representatievariëteiten en karakterstacks. Verder laten we zien dat deze ruimtes een aantal functoriële eigenschappen bezitten die cruciaal zijn voor de latere delen van het proefschrift.

In Hoofdstuk 3 bestuderen we *motivische invarianten*, dat zijn invarianten χ van variëteiten die additief en multiplicatief zijn in de zin dat $\chi(X) = \chi(Z) + \chi(X \setminus Z)$ en $\chi(X \times Y) = \chi(X)\,\chi(Y)$ voor alle variëteiten X en Y en gesloten subvariëteiten $Z \subseteq X$. We bespreken verschillende motivische invarianten en hun eigenschappen, met een nadruk op de universele motivische invariant, de *virtuele klasse*, die waardes aanneemt in de Grothendieck-ring van variëteiten. Deze Grothendieck-ring heeft een natuurlijke generalisatie naar algebraïsche stacks, die ons in staat stelt te praten over de virtuele klasse, en andere motivische invarianten, van bijvoorbeeld karakterstacks. Verder ontwikkelen we hulpmiddelen om motivische invarianten te berekenen, zoals een algoritme om virtuele klassen te berekenen, en bestuderen we hoe motivische invarianten zich gedragen onder groepswerkingen van eindige groepen.

In Hoofdstuk 4 beschrijven we twee bekende methodes om motivische invarianten te berekenen van representatievariëteiten en karakterstacks. We laten zien dat zowel de *arithmetische methode*, die de karakterstacks van compacte oriënteerbare oppervlakten bestudeert door punten te tellen over eindige lichamen, en de *meetkundige methode*, die dezelfde karakterstacks bestudeert door deze slim te stratificeren, kunnen worden beschreven als *topologische kwantumveldentheorie (TQFT).* TQFTs vinden hun oorsprong in de natuurkunde, en zijn monoïdale functoren van de categorie van bordismen naar de categorie van modulen over een vaste commutatieve ring. De TQFTs van beide methodes kunnen worden uitgedrukt als samenstelling van een veldentheorie en een kwantisatiefunctor. Door de veldentheorieën en kwantisatiefunctoren te vergelijken, laten we zien dat de twee TQFTs zijn verbonden via een natuurlijke transformatie.

In Hoofdstuk 5 passen we de theorie van Hoofdstuk 4 toe om expliciet de virtuele klassen van de SL_2-karakterstacks van oriënteerbare en niet-oriënteerbare oppervlakken uit te rekenen, met complexe berekeningen tot gevolg. Ondanks dat er al vergelijkbare berekeningen bestaan die de E-polynomen bepalen (een grovere invariant dan de virtuele klasse, die de gemengde Hodgestructuur weerspiegelt) van deze karakterstacks, introduceert het tillen van deze berekeningen naar de Grothendieck-ring van variëteiten diverse subtiele problemen die we oplossen.

In Hoofdstuk 6 richten we ons op de groepen G van $n \times n$ bovendriehoeksmatrices en unipotente bovendriehoeksmatrices. Met behulp van de computer bepalen we de virtuele klassen van de karakterstacks van oriënteerbare oppervlakken voor $n \leq 5$ via de meetkundige methode, en hun E-polynomen voor $n \leq 10$ via de arithmetische methode. Deze berekeningen, al gecompliceerd voor kleine n, zijn mogelijk gemaakt door het introduceren van algebraïsche representanten en de theorie van speciale algebraïsche groepen. We vergelijken de arithmetische en meetkundige methode, en laten zien hoe de meetkundige methode significant vereenvoudigd kan worden door gebruik te maken van de resultaten van de arithmetische methode, dat wil zeggen, gebruikmakend van de representatietheorie van de groepen van bovendriehoeksmatrices over eindige lichamen.

Ten slotte, in Hoofdstuk 7, bestuderen we de representatievariëteiten en karakterstacks van de vrije groepen F_n en de vrije abelse groepen $\mathbb{Z}^n$. Deze ruimtes parametriseren tupels (resp. commuterende tupels) van elementen van G. Het is bekend dat de homologie van deze ruimtes, en variaties daarop, stabiliseert als n naar oneindig neigt, in een goed-gedefinieerde zin bekend als *representatiestabiliteit.* Geïnspireerd door dit begrip definiëren we een analoog begrip van *motivische representatiestabiliteit* voor stabiliteit in de Grothendieck-ring van variëteiten. Als toepassing laten we zien dat de karakterstacks van F_n en $\mathbb{Z}^n$ stabiliseren in deze zin voor de algemene lineaire groepen $G = \mathrm{GL}_r$.