



Universiteit
Leiden
The Netherlands

The parabolic Anderson model on Galton-Watson trees

Wang, D.

Citation

Wang, D. (2024, May 28). *The parabolic Anderson model on Galton-Watson trees*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/3754826>

Version: Publisher's Version

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/3754826>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Samenvatting

Dit proefschrift bestudeert het parabolisch Anderson model (PAM), d.w.z. het Cauchy-probleem voor de warmtevergelijking met een toevallige potentiaal. Het PAM is een wiskundig model dat beschrijft hoe massa (= materie of energie) door een medium stroomt in aanwezigheid van een toevallige potentiaal, dat als een veld van ‘bronnen’ en ‘putten’ fungeert. Zonder deze potentiaal zorgt diffusie ervoor dat de massa zich gelijkmatig over het medium verdeelt. De potentiaal verandert dit gedrag op een ingrijpende wijze, aangezien de massa de neiging heeft zich rond de ‘bronnen’ te concentreren en rond de ‘putten’ te verdwijnen. Het doel van dit proefschrift is om het lange-termijn-gedrag van de massa te begrijpen: de asymptotische groeisnelheid ervan, evenals hoe en waar de meeste massa zich concentreert.

De vergelijkingen die het PAM aandrijven worden opgelost door een functionaal van een toevalswandeling, die door de bekende Feynman-Kac-representatie gegeven wordt. Deze representatie is het startpunt van de analyse van het PAM. Het PAM is uitgebreid bestudeerd op reguliere roosters en is daar goed begrepen. Het is bekend dat de staart van de verdeling van de potentiaal het asymptotische gedrag van de massa bepaalt, zowel voor de groeisnelheid als voor de locaties met hoge concentraties van de massa. Het reguliere rooster is echter niet altijd een geschikt model, en we zoeken derhalve naar uitbreidingen voor algemene grafen. Er is weinig over het PAM op algemene grafen bekend en de literatuur is uiterst schaars. Dit proefschrift is een bijdrage aan dit ontlukende onderzoeksgebied. Omdat grafen waarvan de knooppunten begrensde graden hebben vaak door bomen kunnen worden benaderd, is het bestuderen van het PAM op een boom de natuurlijke eerste stap. Dit proefschrift is dan ook vooral gewijd aan het bestuderen van het PAM op toevallige bomen met potentialen met een dubbel-exponentiële staartverdeling.

De studie van het PAM is verdeeld in twee gevallen: ‘quenched’ en ‘annealed’. Dat wil zeggen, bijna zeker ten opzichte van de potentiaal, respectievelijk, gemiddeld over de potentiaal. Dit proefschrift bestrijkt beide en is daarom in twee delen verdeeld: deel I is gewijd aan het ‘quenched’ model en deel II aan het ‘annealed’ model.

Deel I bestaat uit de Hoofdstukken 2 en 3 en behandelt het ‘quenched’ model. Hoofdstuk 2 onderzoekt het PAM op een reguliere boom en leidt de eerste twee termen van de asymptotische groei van de massa af. Net als bij het rooster vereist het argument het afleiden van asymptotisch op elkaar aansluitende boven- en ondergrenzen. De grootste uitdaging is het omgaan met de exponentiële groei van de graafgrootte, die niet in het rooster optreedt. Een nieuwe techniek voor het vouwen van de paden van de toevalswandeling wordt gepresenteerd en het grote-afwijkingen-gedrag ervan wordt geanalyseerd om de bovengrens af te leiden. Bovendien wordt het concen-

tratiegedrag van de massa bepaald in termen van minimalisatie van een variationele formule. Het argument berust op een herschikkingsongelijkheid, die het gebrek aan translatie-invariantie overwint.

Hoofdstuk 3 breidt Hoofdstuk 2 uit naar een Galton-Watson-boom met een eindige periodiciteit – een generalisatie van de reguliere boom. Dit vereist zorgvuldig navigeren door de niet-homogeniteiten van de Galton-Watson-boom en het omgaan met graden die toevalsvariabelen zijn. Dit hoofdstuk is de cruciale stap in het begrijpen van het PAM op de Galton-Watson-boom, die veel toevallige graafmodellen waarvan de graden niet al te groot zijn goed benadert.

Deel II bestaat uit de Hoofdstukken 4 en 5 en behandelt het ‘annealed’ model. Hoofdstuk 4 onderzoekt het PAM op een Galton-Watson-boom. De asymptotische groeisnelheid van de totale massa werd afgeleid in eerder werk van den Hollander, König en dos Santos, onder de restrictieve aanname dat de graden van de boom begrensd zijn. Hoofdstuk 4 breidt hun analyse uit naar bomen met onbegrensde graden, en identificeert de zwakste condities op de gradenverdeling waaronder hun technieken nog steeds bruikbaar zijn. Dit wordt gedaan door de grote graden in sub-bomen onder controle te houden. Het bestaan en de uniciteit van de Feynman-Kac-representatie op exponentieel groeiende grafen wordt ook in dit hoofdstuk behandeld.

Hoofdstuk 5 beschouwt opnieuw het PAM op een Galton-Watson-boom, en breidt het eerdere werk van den Hollander, König en dos Santos uit naar de versie van het model waarin de Laplaciaan door de graad-genormaliseerde Laplaciaan vervangen wordt. Het komt erop neer dat de toevalswandeling in de Feynman-Kac-representatie een sprongsnelheid van 1 heeft, in plaats van de graad van het knooppunt waarop het zich bevindt. Deze normalisatie zorgt ervoor dat de Laplaciaan niet langer symmetrisch is, wat in andere spectrale eigenschappen resulteert. We laten zien dat de asymptotische groeisnelheid van de totale massa hetzelfde is, terwijl de variationele formule die de verdeling van de massa beschrijft anders is. Ook wordt de zwakste conditie op de gradenverdeling geïdentificeerd.