



Universiteit  
Leiden  
The Netherlands

## Logarithmic approach to the double ramification cycle

Schwarz, R.M.

### Citation

Schwarz, R. M. (2023, December 7). *Logarithmic approach to the double ramification cycle*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/3665965>

Version: Publisher's Version

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/3665965>

**Note:** To cite this publication please use the final published version (if applicable).

# Samenvatting

Aan het oplossen van vergelijkingen wordt binnen de wiskunde veel aandacht besteed. Een voorbeeld van zo'n vergelijking is

$$x^2 + y^2 = 4$$

waarvan de oplossingen een cirkel vormen in het  $x, y$ -vlak over de reële getallen  $\mathbb{R}$ .

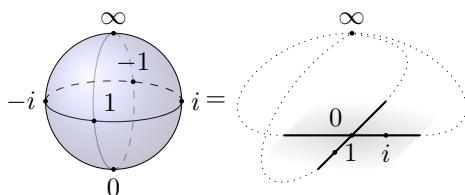
Een ander voorbeeld is de vergelijking

$$y^2 - x(x - 1)(x - 2) = 0$$

welke een vergelijking is van een zogenoemde kubische kromme: een *kromme* is een eendimensionaal object gedefinieerd door een polynomiale vergelijking. Voorbeelden van krommen zijn lijnen, parabolen of kubische krommen zoals hierboven. Een kromme is echter niet altijd één enkele 'kromme lijn', maar mag ook bestaan uit meerdere stukken, die formeel 'irreducibele componenten' worden genoemd. Bijvoorbeeld als we naar de polynomiale vergelijking  $xy = 0$  zouden kijken, krijgen we als oplossingen zowel de lijn  $x = 0$  als de lijn  $y = 0$ , en zodoende is de vereniging van de  $x$ - en  $y$ -as ook een kromme.

Stel we zoeken oplossingen voor deze vergelijkingen in de complexe getallen, wat niet alleen reële getallen omvat maar ook een element  $i$  welke de rol speelt van de wortel van  $-1$ , dus waarvoor geldt  $i^2 = -1$ . Dan is het bestuderen van de nulpuntsverzamelingen van zulke polynomiale vergelijkingen (waarbij we soms ook punten op oneindig dienen toe te voegen) die ook glad zijn (dus als je ze tekent hebben ze geen onverwachte kronkels), eigenlijk het zelfde als compacte samenhangende eendimensionale complexe variëteiten (veelvouw) die Riemann oppervlakken worden genoemd. Deze woordenreeks kan het best worden uitgelegd met een simpel voorbeeld. We bekijken de Riemann bol,  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , welke kan worden geconstrueerd door een punt op oneindig toe te voegen aan de complexe getallen  $\mathbb{C}$ , dus  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

Ondanks dat de verzameling van complexe getallen  $\mathbb{C}$  formeel gezien eendimensionaal is over  $\mathbb{C}$  zelf, is het makkelijker om  $\mathbb{C}$  te tekenen als een tweedimensionaal vlak over  $\mathbb{R}$ , door de ene as de reële getallenlijn te nemen, en de andere as voor de veelvouden van  $i$  te gebruiken. Door één punt op oneindig toe te voegen aan dit vlak van complexe getallen, krijgen we het figuur in Figuur 1.

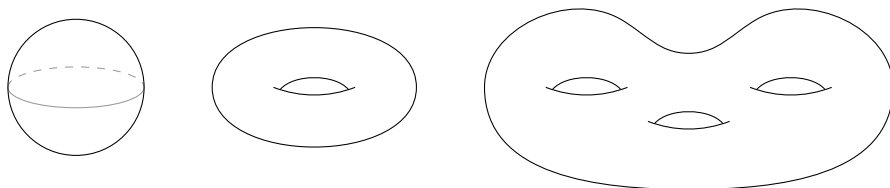


Figuur 1: Riemann bol  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Net zoals dat we  $\mathbb{C}$  tekenen als tweedimensionaal vlak over  $\mathbb{R}$ , ondanks dat het formeel complex eendimensionaal is, kunnen we ook een algebraïsche kromme (formeel eendimensionaal over  $\mathbb{C}$ ) tekenen als tweedimensionaal oppervlak over  $\mathbb{R}$ : wat de reden is dat we deze objecten die we bestuderen Riemann ‘oppervlakken’ noemen. Het woord ‘compact’ komt in dit voorbeeld naar boven omdat we niet alleen het complexe vlak bekijken, in welke we in een willekeurige richting oneindig lang weg kunnen lopen, maar dat we deze richtingen verbinden aan het punt op oneindig, waardoor we een soort van dichtbij blijven. Het woord ‘samenhangend’ slaat op dat de bol één geheel is en deze niet zomaar in tweeën uiteen kan vallen, zoals wel het geval is bij bijvoorbeeld twee losse punten in een vlak. Het zijn van een eendimensionale complexe variëteit komt neer op dat als je een klein stuk van je Riemann bol bekijkt, zoals een stukje of lap van een voetbal, dat dit stuk dan eigenlijk hetzelfde is als wanneer je een kleine omgeving van het complexe vlak pakt (wat complex eendimensionaal is over  $\mathbb{C}$ ).

Andere voorbeelden van een Riemann oppervlak zijn een donut of een pretzel zoals geschetst in Figuur 2.

Als je naar deze Riemann oppervlakken kijkt, zie je dat een belangrijk verschil zit in hoeveel gaten er eigenlijk in je oppervlak zitten. Dit aantal gaten als een topologisch oppervlak noemen we het geslacht  $g$ . De donut heeft één enkel gat en heeft dus geslacht 1, maar de Riemann bol heeft geen gaten en heeft dus geslacht 0. De pretzel zoals hierboven geschetst, heeft geslacht 3. Het voorbeeld van de kubische vergelijking die hierboven werd gegeven,



Figuur 2: Voorbeelden van Riemann oppervlakken van geslacht 0,1 en 3

$y^2 - x(x-1)(x-2) = 0$ , definieert een Riemann oppervlak van geslacht 1. Algebraïsch meetkundigen zijn in het bijzonder geïnteresseerd wat er gebeurt als je deze algebraïsche krommen (dus Riemann oppervlakken) vervormt of aanpast; welke eigenschappen veranderen wel en welke niet onder zulke kleine veranderingen? Dit noemen we het bestuderen van krommen in families. We kunnen bijvoorbeeld de polynomiale vergelijking voor de kubische kromme aanpassen door de vergelijking

$$y^2 - x(x-1)(x-\alpha) = 0$$

te bekijken waarbij de variabele  $\alpha \in \mathbb{C}$  mag worden veranderd in elk complex getal. De parameter  $\alpha$  zorgt ervoor dat we dit zien als een familie met één parameter. Maar niet voor alle waarden van  $\alpha$  is dit een netjes gladde kromme en dus bestuderen we als we deze familie willen onderzoeken niet alleen Riemann oppervlakken van geslacht 1.

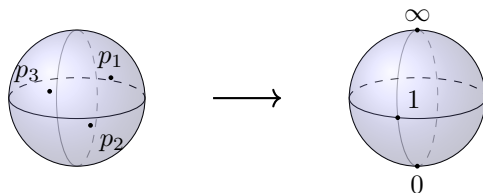
Om zulke families te kunnen bestuderen, gebruiken wij een zogeheten moduli-ruimte van krommen: een moduli-ruimte is zelf een meetkundig object wiens punten op een manier de krommen waar we in geïnteresseerd zijn representeren of parametriseren. Let wel dat het woord parametriseren impliciet ook een criterium meegeeft over wanneer we twee zulke algebraïsche krommen (of Riemann oppervlakken) hetzelfde noemen. De punten van de moduli-ruimte dienen namelijk alleen de echt verschillende krommen te representeren. In dit geval noemen we twee Riemann oppervlakken hetzelfde als deze biholomorf zijn, dat wil zeggen wanneer er een isomorfisme is die de voetballapjes structuur van de complexe variëteit behoudt. Een element van de moduli-ruimte noteren we dan met een klasse  $[C]$  die alle krommen die biholomorf zijn aan een zekere kromme  $C$  vertegenwoordigt. De moduli-ruimte van Riemann oppervlakken van zeker geslacht  $g$  wordt genoteerd met  $\mathcal{M}_g$  en werd al rond 1857 door Riemann bestudeerd. Hij zag ook in dat zo'n moduli-ruimte van variaties van complexe structuren voor geslacht  $g$  krommen in principe ook zelf weer een complexe

variëteit van dimensie  $3g - 3$  vormt.

Voor het beantwoorden van sommige vragen of telproblemen in de meetkunde van krommen kan het handig zijn om krommen te bekijken met een aantal vaste punten met een ordening. Bijvoorbeeld bij de vraag of er krommen bestaan door 5 gegeven punten in een vlak, of de vraag naar krommen die raken aan bepaalde lijnen. Om deze krommen samen met deze gespecificeerde punten te analyseren, gebruiken we de moduli-ruimte  $\mathcal{M}_{g,n}$  die alle gladde krommen  $C$  met  $n$  verschillende aangewezen punten op  $C$  (op biholomorfismes die de geordende aangewezen punten respecteren na):

$$[C, p_1, \dots, p_n] \in \mathcal{M}_{g,n}.$$

In geslacht 0 (de Riemann oppervlakken zonder gaten) kan men bijvoorbeeld laten zien dat elk Riemann oppervlak een biholomorfisme heeft naar de Riemann bol,  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  zoals getekend in Figuur 1. Dan valt elke geslacht 0 kromme dus in dezelfde klasse als  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . Als we dan ook een aantal punten op de kromme bekijken, krijgen we dat de moduli-ruimte  $\mathcal{M}_{0,n}$  eigenlijk alleen de  $n$  verschillende punten op  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  (op biholomorfismes na) parametrizeert. Stel dat we de krommen bekijken die  $\mathcal{M}_{0,3}$  vormen, dan bekijken we dus de Riemann bol met drie verschillende punten  $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . Nu kunnen we een unieke ‘fractionele lineaire transformatie’  $g: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  construeren, waarbij we het punt  $p_1$  sturen naar 0 en het punt  $p_3$  naar  $\infty$  (door het nulpunt en de pool van onze fractionele functie  $g$  juist te kiezen) en vervolgens mogen we de functie nog schalen met elementen uit  $\mathbb{C}^*$  om ervoor te zorgen dat  $g(p_2) = 1$ . Zo’n transformatie of omvorming is geschetst in Figuur 3. Daarom kunnen we elke kromme van

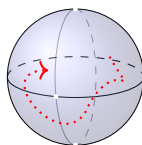


Figuur 3: Biholomorfisme van  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  die de aangewezen punten omvormt naar 0, 1 en  $\infty$

geslacht 0 met drie aangewezen punten zien als ‘hetzelfde’ als  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  met de punten 0, 1,  $\infty$ . Dan bestaat de moduli-ruimte  $\mathcal{M}_{0,3}$  slechts uit één enkele klasse of één punt.

Stel dat we zo’n zelfde analyse willen doen met de krommen die door  $\mathcal{M}_{0,4}$  geparametriseerd worden. De geslacht 0 kromme is nog steeds ‘hetzelfde’

als  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , dus bekijken we krommen met vier verschillende aangewezen punten  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . Dezelfde argumenten als hierboven zorgt ervoor dat we de eerste drie punten kunnen transformeren naar  $0, 1$  en  $\infty$ , maar als we een nulpunt, pool en schaling hebben gekozen, hebben we geen vrijheden meer om de plek van vierde punt nog te controleren. Het vierde aangewezen punt zal dus met de transformatie ergens anders in  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  terechtkomen, maar omdat  $p_4$  verschillend is van  $p_1, p_2$  en  $p_3$ , zal deze met de transformatie niet terechtkomen op  $0, 1$  of  $\infty$ . De moduli ruimte  $\mathcal{M}_{0,4}$  parametriseert dan het kiezen van het laatste vierde aangewezen punt en dat kan in  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ . Dus is  $\mathcal{M}_{0,4}$  zelf isomorf met  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ . Dan zien we dat  $\mathcal{M}_{0,4}$  zelf een Riemann bol met een aantal punten verwijderd is en dus inderdaad een object met een zekere meetkundige structuur. Stel je nu voor dat je wandelt door je moduli ruimte en je overeenkomstig je Riemann oppervlak met vier aangewezen punten omvormt. Dat wil zeggen, elk punt dat je tegenkomt op je wandeling representeert een geslacht 0 kromme met 4 aangewezen punten, en deze omvormen resulteert in dat het vierde punt varieert door  $\mathcal{M}_{0,4} = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ . Een voorbeeld van zo'n wandeling waarbij je het vierde punt verschuift is getekend in Figuur 4. Echter, als je in de buurt van  $0, 1$  en  $\infty$  komt, moet je je voorstellen dat je bij



Figuur 4: Omvormen van krommen in  $\mathcal{M}_{0,4} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

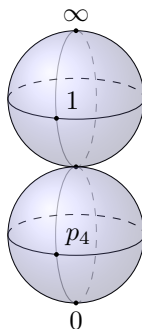
deze punten opeens in het niets zou verdwijnen of in een zinkgat zou vallen. Dit betekent dat je eigenlijk veel liever de meetkundige ruimte  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  zou willen bestuderen, om bijvoorbeeld berekeningen te maken of invarianten te bepalen, in het bijzonder de zogenoemde cohomologie of Chow klassen. Het proces van het uitbreiden van je moduli ruimte zodat het geen zinkgaten meer bevat, wordt het ‘compactificeren’ van je moduli ruimte genoemd. In dit geval werd dit gedaan door Deligne en Mumford in 1969 die een grotere moduli ruimte

$$\mathcal{M}_g \subset \overline{\mathcal{M}}_g$$

construeerden door ook krommen met bepaalde knooppunten toe te staan zolang deze maar eindig veel automorfismen hadden uiteindelijk (deze krommen

worden ook stabiele krommen genoemd). De knooppunten die werden toegestaan waren knopen die lokaal erg lijken op het snijden van de  $x$ - en  $y$ -as in een complex tweedimensionaal ‘vlak’.

Op een soortgelijke manier kan ook de moduli ruimte  $\mathcal{M}_{g,n}$  worden uitgebreid naar de moduli ruimte  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  van stabiele krommen met geslacht  $g$  en  $n$  aangewezen punten (waar onze aangewezen punten niet de knooppunten mogen zijn die de kromme eventueel heeft). In het voorbeeld van geslacht 0 en vier aangewezen punten zullen we dan terwijl we het vierde punt op de Riemann bol omvormen, niet meer hopeloos in de aarde verdwijnen in de buurt van bijvoorbeeld 0, maar eerder daar een stabiele kromme getekend in Figuur 5 tegenkomen: in dit geval twee kopieën van  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  die vastzitten aan één knooppunt, waar de ene kopie de aangewezen punten 0 en 4 bevat, en de andere 1 en  $\infty$ .



Figuur 5: Voorbeeld van een stabiele kromme in  $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$

(Omdat beide kopieën van  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  die punten hebben die een automorfisme zou moeten behouden, namelijk een knooppunt en twee aangewezen punten, heeft deze kromme slechts één en dus eindig veel automorfismen.) Er kan nu bewezen worden dat deze ‘gecompactificeerde’ versie van  $\mathcal{M}_{0,4} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  eigenlijk isomorf is met  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  en dus zelf een Riemann bol en een mooie meetkundige ruimte is. In het algemeen is het zo dat de moduli ruimte  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  een goede meetkundige structuur heeft die ons toestaat om met behulp van deze ruimte zekere meetkundige problemen op te lossen.

Dit proefschrift behandelt enkele vragen met betrekking tot de *dubbele vertakkingsklasse* op  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . Deze klasse komt voort uit het stellen van de volgende vraag: gegeven een zekere kromme  $C$ , is er een rationale functie  $f$  op  $C$  die

zekere vantevoren vastgestelde multipliciteiten van nulpunten en polen heeft? We mogen bijvoorbeeld vragen naar een nulpunt met multipliciteit 2 en twee polen met multipliciteit 1. Deze vantevoren vastgestelde multipliciteiten liggen vast in een vector  $A = (a_1, \dots, a_n)$  van  $n$  gehele getallen die voldoen aan  $\sum_{i=1}^n a_i = 0$  een waarbij de positieve  $a_i$  de multipliciteiten van de nulpunten vastleggen en de negatieve  $a_i$  de multipliciteiten van de polen. De vraag die we stellen kunnen we dan formuleren als: is er een rationale functie  $f: C \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  met nulpunten met multipliciteiten  $a_i$  voor de  $a_i$  met  $a_i > 0$  en polen met multipliciteiten  $a_i$  voor de  $a_i$  met  $a_i < 0$ ? Omdat we het vertakkingsprofiel van de functie  $f: C \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  over twee punten, namelijk 0 en  $\infty$ , specificeren, gebruiken we de terminologie *dubbele vertakking*. De verzameling van alle krommen in  $\mathcal{M}_{g,n}$  die zo'n rationale functie met een nulpunt of pool van multipliciteit  $a_i$  op het  $i$ -de aangewezen punt heeft, vormt dan de basis van wat wij de *dubbele vertakkingsklasse* noemen. Echter, zoals hierboven beschreven, werken we liever in de moduli-ruimte  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ , en moet deze intuïtieve definitie nog geeneraliseerd worden om te geven wat we echt de dubbele vertakkingsklasse op  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  noemen.

In dit proefschrift worden de vragen over de dubbele vertakkingsklasse behandeld met technieken uit de zogenoemde logaritmische meetkunde. De eerste vraag die wordt behandeld is of er een universele constructie is van de dubbele vertakkingsklasse op  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ , die ook een aantal generalisaties geheten de verdraaide dubbele vertakkingsklassen kan beschrijven. Deze vraag wordt beantwoord in [BHP<sup>+</sup>23], wat de basis is van hoofdstuk 1 in dit proefschrift.

Een andere veelgestelde vraag met betrekking tot dit soort klassen is de vraag of een klasse in de 'tautologische' ring ligt. Dat wil zeggen, of een klasse in een deelring ligt die wordt voortgebracht door bekende en berekenbare klassen. De vraag of de dubbele vertakkingsklasse op  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  tautologisch is, werd al eerder beantwoord in bijvoorbeeld [FP05] en er bestaat ook een specifieke formule om deze te berekenen in [JPPZ17]. In het artikel [HS22] (welke hoofdstuk 3 vormt van dit proefschrift) zijn we in staat om aan te tonen dat nog meer interessante klassen ook tautologisch zijn, door eerst te beschrijven of te definiëren wat het concept tautologisch zou moeten zijn in de wereld van de logaritmische meetkunde. Dit doen we met behulp van stuksgewijs polynomiale functies, welke in hoofdstuk 2 verder worden toegelicht door middel van voorbeelden en de relatie tot de klassieke algebraïsche meetkunde. Het hoofdstuk is een uitgebreidere uitleg voor inhoud van het artikel [HS22]. We kunnen ook in hoofdstuk 3 de vraag beantwoorden wat een goede definitie is van een dubbele dubbele vertakkingsklasse, namelijk waar we twee vertakkingsprofielen tegelijk bekijken. Dan heb je dus twee vectoren  $A, B \in \mathbb{Z}^n$  en de *dubbele dubbele*



*vertakkingsklasse*  $DR(A, B)$  meet dan die stabiele krommen waarbij zowel een rationale functie  $f$  bestaat met vertakkingen gegeven door  $A$  als een rationale functie  $g$  met vertakkingen gegeven door  $B$ . We bewijzen vervolgens dat deze dubbele dubbele vertakkingsklasse tautologisch is.