Optimalisering: hoe fundamenteler hoe beter

Spieksma, F.M.

Prof.dr. F.M. Spieksma

Optimalisering: hoe fundamenteler hoe beter

Universiteit Leiden

Bij ons leer je de wereld kennen

Optimalisering: hoe fundamenteler hoe beter

Rede, in verkorte vorm uitgesproken door

Prof. dr. Flora M. Spieksma

bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar

Mathematische Besliskunde

aan de Universiteit Leiden

op vrijdag 1 september 2023

Universiteit Leiden

Mevrouw de rector magnificus, mevrouw de voorzitter van het College van Bestuur, zeer gewaardeerde toehoorders.

Zotteklap

Tijdens de voorbereiding van deze oratie kreeg ik veel bezorgde reacties van genodigden over het onderwerp van deze rede. Dit is natuurlijk zeer begrijpelijk. In ieder willekeurig wiskunde-artikel bent u binnen twee regels het spoor volledig bijster. Weest gerust. Dat overkomt mij net zo bij het opslaan van een willekeurig artikel van een analytische of algebraïsche collega, met dien verstande dat ik misschien enkele regels verder kom dan u! Erasmus geeft u hierbij wellicht een psychisch steuntje bij monde van de Zotheid [1, XXXII]:

> *"De wetenschappen zijn immers...*
> *de bitterste vijand van het menselijk geslacht ...*
> *uitgedacht tot verderf der mensheid...*
> *Want het primitieve geslacht, dat in het gouden tijdperk de aarde bevolkte,*
> *leefde instinctief, alleen volgens de aanwijzigingen van de natuur*
> *en had geen wetenschap van node".*

Mark Kac, een Poolse wiskundige die in 1963 Lorentz hoogleraar in Leiden was, beaamt dit in zekere zin in zijn autobiografie: [2, pp.1–2]

> *"In the summer of 1930...*
> *I had been stricken by an acute attack of a disease*
> *which at irregular intervals afflicts all mathematicians....:*
> *I became obsessed by a problem.*
> *The symptoms are familiar and easily recognized,*
> *especially by the victims' wives,*
> *since they consist in a marked increase in antisocial behavior.*
> *Loss of sleep and appetite is also frequent.*
> *In my case the symptoms were especially pronounced;*
> *so much so, in fact, that my family was beginning to worry"*

Wetenschappelijk onderzoek en in het bijzonder wiskundig onderzoek lijkt dus een verderfelijke en ziekmakende bezigheid.

Maar...houdt de Zotheid ons niet enigszins voor de mal? Zaten in dat "gouden tijdperk" mensen tevreden naakt in de kou te kauwen op wat verzamelde vruchten en op een met de handen gevangen rauwe vis? Dat gelooft u zelf niet! Mensen hebben toch altijd de drang gehad hun leven te willen veraangenamen en te verlichten door de wereld om zich heen beter proberen te begrijpen en te controleren. Het gevolg van deze begripsdrang is dat u veel meer wiskundige bagage hebt dan u dacht, en uw hele leven veel meer door wiskunde beheerst wordt dan u zich mogelijk realiseert!

Denkt u alleen al aan het decimale stelsel. Op school hebt u geleerd dat het getal 2023 van achter naar voren gelezen moet worden als $3\times1+2\times10+0\times100+2\times1000$, oftewel als $3\times10^0+2\times 10^1 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^3$. Van achteren naar voren neemt de macht van 10 waarmee vermenigvuldigd wordt met 1 toe.

Dit stelsel heeft twee bijzonderheden. Ten eerste is het een zogenaamd positioneel systeem. Dat wil zeggen, dat de positie van een cijfer in een getal zijn bijdrage aan de waarde van dat getal bepaalt. Ten tweede, als een macht van 10 niet 'mee mag doen' in de berekening, schrijven we een '0' op de desbetreffende plaats. Positionele systemen, zonder gebruik van de 0, bestonden al in de Oudheid. Maar pas met de introductie van de 0 als 10-de cijfer was tegen 900 in India [3, p. 239] ons decimale stelsel 'klaar'. De overgang van het Romeinse cijfersysteem naar het decimaal stelsel heeft zelfs tot in de 16de eeuw geduurd!

Een belangrijke rol hierbij is door Leonardo Pisano gespeeld. U kent hem vast onder de naam Fibonacci. In zijn Liber Abaci uit 1202 propageert hij niet alleen het decimale stelsel als een superieur getalsysteem, maar behandelt hij o.a. ook de standaard algoritmes als 'onder elkaar vermenigvuldigen', 'optellen met onthouden' en 'staartdelen', die een direct gevolg zijn van de decimale schrijfwijze van het getallenstelsel [4, Chapter 13]. Voor de duidelijkheid: het woord 'algoritme' betekent 'rekenmethode' of 'rekenrecept'.

Hierdoor heeft het Liber Abaci een niet te onderschatten invloed gehad op met name het handelsrekenen! U moet er toch niet aan denken om 100 getallen foutloos op te tellen dan wel 2 grote getallen te vermenigvuldigen in Romeinse cijfers? En als u dat toch probeert, denkt u dan niet stiekem decimaal?

De vervolgstap naar het moderne binaire stelsel lijkt klein, maar blijkt pas in de 16de-17de eeuw bedacht, en door Leibniz in zijn artikel van 1703 [5] uitgewerkt. En...zonder binair denken hadden onze huidige computers niet bestaan en dus ook uw huidige ver-Smarte leven niet!

In de 13de eeuw zouden decimaal en binair stelsel, optellen met onthouden en onder elkaar vermenigvuldigen voor u als 6 à 8-jarige angstaanjagende kost zijn geweest! Nu is het zo geïntegreerd in uw dagelijkse leven, dat u er niet eens meer over nadenkt!

Ik heb niet voor niets toepassingen binnen het handelsrekenen genoemd. Mijn leerstoel, de 'mathematische besliskunde' is onderdeel van wat toegepaste wiskunde wordt genoemd. De mathematische besliskunde, is een betrekkelijk jong boompje in het wiskundebos met twee uitlopers: de discrete besliskunde over 'kans'-loze problemen en de stochastische besliskunde over 'kans'-rijke problemen.

Als eerste zal ik wat over de geschiedenis van deze leerstoel vertellen. Vervolgens zal ik met behulp van enkele voorbeelden de discrete en stochastische uitlopers toelichten. Aan de hand van de voorbeelden zal ik daarna mijn oratie-titel proberen te verklaren. Tenslotte zal ik nog ingaan op mijn visie en hoop voor de toekomst van de besliskunde in Leiden.

Mathematische besliskunde groep in Leiden

De toegepaste wiskunde in Leiden is opgezet door Guus Zoutendijk. In 1964 kwam hij naar Leiden als hoogleraar numerieke wiskunde, voorganger dus van onze rector! Hij heeft vervolgens de leerstoelen mathematische statistiek (met hoogleraar Willem van Zwet), waarschijnlijkheidsrekening (met de latere hoogleraar Jaap Fabius), en informatica (met hoogleraar en Himalaya-beklimmer Alexander Verrijn Stuart) weten in te stellen. De naam 'informatica' is overigens door Zoutendijk bedacht [6], geheel in de geest van Simon Stevin, de bedenker van (o.a.) het woord 'wiskunde'.

In 1971 veranderde hij van leerstoel en werd hij zowel hoogleraar mathematische besliskunde als Eerste Kamerlid voor de VVD, tot hij in 1975 naar Delta Lloyd vertrok. In 1976 werd hij opgevolgd door Arie Hordijk, die in 2005 met emeritaat ging. De leerstoel bleef vacant tot de komst van interim WD en mijn oudste wetenschappelijke broertje Frank van der Duijn Schouten per 1 october 2020. Na zijn vertrek 9 maanden later ben ik hem op deze leerstoel opgevolgd.

Guus Zoutendijk had daarnaast in 1969 een pas afgestudeerde student als medewerker weten aan te trekken: Lodewijk Kallenberg. Besliskundig Nederland kent hem als hoogleraar-directeur van het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde, dat hij van 1993 tot zijn emeritaat in 2010 geleid heeft. Oorspronkelijk organiseerde het Landelijk Netwerk alleen landelijk cursussen (in Utrecht) op alle gebieden van de besliskunde voor promovendi. Al jaren draait het Landelijke Netwerk ook mee met master cursussen binnen het nationale wiskunde-masterprogramma Mastermath. De wiskundige en besliskundige B.V. Nederland heeft hiermee een uniek aanbod aan master-onderwijs dat zijn weerga in de wereld niet kent! Helaas lijkt de enthousiaste interesse van goede studenten hiervoor uit andere EU-landen tegenwoordig actief ontmoedigd te worden omdat dat te veel werk voor de collega's zou zijn. Hoezo? Die colleges worden toch gegeven.

Kallenberg is in 2010 met emeritaat gegaan, en gelukkig is daar in 2019 Odysseas Kanavetas bijgekomen, omdat ik opleidingsdirecteur (afgekort: OD) was geworden.

Zoals velen van u bekend is, heb ik mijn hele academische leven in Leiden gesleten op een half jaar Berkeley na, en wel sinds het ontstaansjaar van het roemruchte witte-mannen-schilderij van Rein Dool! Na mijn promotie ben ik dus niet uit Leiden vertrokken, wat tegenwoordig het gebruik is.

De reden hiervoor is verwant aan de titel van mijn oratie. Besliskunde-onderwijs en onderzoek binnen een theoretisch wiskunde-instituut. Ik voel me zelf onprettig als ik de fundamenten van de theorie die ik gebruik niet begrijp. In mijn eerste jaar begreep ik niets van kansrekening. Ik heb bij wijze van spreken nog nachtmerries van een kanssommetje over hoeveel mensen in de lift van een flatgebouw gemiddeld per verdieping uitstappen. Het was een totaal mysterie voor mij waarom mijn redenering fout en de gegeven redenering correct was, en dat maakt een mens onzeker. Twee jaar later met de kennis van het vak maattheorie [7, pag.104 opgave 11] was dat sommetje een trivialiteit, wat een opluchting! Het probleem was blijkbaar het ontbreken van een heldere systematiek om het probleem te structureren en vervolgens te vertalen naar een wiskundige formulering. Wellicht hielp tegen die tijd ook de toegenomen omvang van mijn intussen opgebouwde 'trukendoos' ...

Voorbeelden uit de Mathematische Besliskunde

Discrete besliskunde: 'Kans'-loze voorbeelden

Het eerste 'kans'-loze voorbeeld is een bachelor project, waarvan de resultaten op ons instituut dankbaar gebruikt worden!

Het bachelorseminarium als toewijzingsprobleem [8]. Bij onze bacheloropleiding is het bachelor-afstudeerproject via een seminarium ingericht. Hiervoor leveren docenten bij de organisatie een aantal mogelijke projecten in. De studenten mogen vervolgens een voorkeurslijstje van maximaal vijf projecten kiezen.

De opdracht voor de organisator is om een toewijzing van projecten aan studenten zó te maken dat zoveel mogelijk studenten een zo hoog mogelijke voorkeur toegewezen krijgen. De organisator heeft dit jarenlang met de hand gedaan en mopperde op de hoeveelheid werk die dit hem kostte. Waarom dus niet een bachelorproject formuleren over de toewijzing van de bachelorprojecten? Zo gezegd zo gedaan. Ik geloof dat dat het populairste project van dat jaar was!

Toen de hiervoor uitverkoren studente naar de toewijzingen van dat jaar keek, zag ze binnen een paar minuten al een betere. Te proberen om met de hand de beste oplossing te vinden zonder verdere kennis leidt dus niet gegarandeerd tot succes!

Het toewijzingsprobleem is een klassiek probleem waarvoor een algoritme bekend is, dat in de praktijk snel werkt. Dat algoritme zou in principe als uitkomst ook halve projecten aan driekwart studenten kunnen toekennen. Afronden van zo'n soort oplossing kan een héél slecht resultaat geven, maar het bijzondere van het toewijzingsprobleem is dat dat niet kan gebeuren. Dat kun je bewijzen en onze studenten hebben ook geleerd hoe.

Dit kwam ons goed van pas, omdat we eigenlijk niet precies de standaardvorm van dit toewijzingsprobleem wilden oplossen. Waarom niet? Als docent vind ik het prima om een lijstje van nieuwe en oude niet-gebruikte projecten in te leveren, om zo de keuzemogelijkheden voor de studenten te vergroten. Maar dat wil natuurlijk niet zeggen dat ik tijd heb om alle projecten van het lijstje te begeleiden. Zo'n begeleiding kost me minstens een uur gemiddeld per week, gedurende een maand of zes. Het moest dus mogelijk zijn voor docenten om een maximum te kunnen opgeven voor het aantal te begeleiden projecten. De vraag was dus of de navenante aanpassing van het algoritme nu wél uitkomsten zou kunnen hebben in de vorm van het toewijzen van een half project aan vijf-achtste student. Door de kennis van de onderliggende wiskunde van dit algoritme, lukte het om te laten zien dat ook in dit geval zulke uitkomsten niet kunnen voorkomen.

Voor al die ouders en hun kinderen die geleden hebben onder de loot-systemen voor een middelbare school in Amsterdam, Haarlem,...: de toewijzing van scholen aan potentiële scholieren zou op een analoge manier aangepakt kunnen worden!

Een komische noot: één van mijn bachelor-scriptanten vertelde mij onlangs heel zelf-voldaan, dat hij en de mede-fans van besliskunde in de bachelorgroep meteen met elkaar gingen onderhandelen over hoe ze het best hun lijstjes konden invullen om zo één van hun favoriete projecten te krijgen. Inzet van speltheorie, waarover ze in mijn colleges ook het één en ander hadden geleerd! Meer weten is beter en kennis is de kunst!

Het volgende 'kans'-loze probleem komt uit een heel recent project binnen de 'Mathematics and Science Communication and Society' master.

Het enigma achter de Enigma machine[9]. Als u de film The Imitation Game hebt gezien, dan weet u dat de Enigma de machine was die de Duitsers in de tweede wereldoorlog gebruikten voor het coderen van de communicatie met hun gevechtseenheden. Iedere gevechtseenheid had zelf ook een Enigma voor het decoderen van de geseinde gecodeerde berichten. De oorspronkelijke boodschap werd op de Enigma in het commando-centrum gecodeerd, en vervolgens via Morse overgeseind naar bijvoorbeeld een onderzeeër. De plaatselijke Enigma werd in dezelfde beginstand gezet als de Enigma in het commandocentrum bij aanvang van het coderen, en vervolgens werd de gecodeerde boodschap op de plaatselijke Enigma gedecodeerd.

U weet dan vast ook dat de Enigma gekraakt is, grotendeels zelfs al voor 1940. Wat u misschien niet weet, is dat dit een Gesamtprojekt is geweest van een aantal landen, waaraan niet alleen de Britten, maar met de name ook de Polen een cruciale bijdrage hebben geleverd.

Ik zal kort iets vertellen over de werking van de Enigma. Op het oog is het een typemachine, met een extra bord met 26 lampjes, elk met een verschillende letter. Als je bijvoorbeeld een *A* typt, en het lampje met de letter *D* licht op, dan betekent dit dat *A* wordt gecodeerd als een *D*. Er loopt dus een electrische stroom van de letter *A* naar lampje *D*.

De letter *D* wordt vervolgens overgeseind, en op de Enigma op de onderzeeër ingetypt, waarna lampje *A* oplicht. Als de Enigma in de beginstand staat waarmee letter *A* als een *D* wordt gecodeerd, dan wordt in dezelfde beginstand letter *D* als een *A* gecodeerd. Hoe wordt dit binnen de Enigma bewerkstelligd? Binnenin de Enigma zit per letter een electrisch circuit van negen achter elkaar geschakelde schakelsystemen die ieder letters in andere omzetten. Om een D te worden, 'reist' de A door dit systeem, waarin zij negen keer in een andere letter verandert. Als je nu een D typt in plaats van een A, dan 'reist' de D in omgekeerde richting door het zelfde systeem en wordt ze een A.

Dit wordt in de Enigma bewerkstelligd door symmetrie van het electrische circuit: de eerste vier schakelsystemen worden in de laatste vier stappen in omgekeerde volgorde doorlopen. Het middelste schakelsysteem verwisselt daarbij letters in paren: als een *B* een *X* wordt, dan wordt een *X* een *B*.

Omdat letters hierdoor in paren worden gecodeerd, is het aantal mogelijke coderingen van het alfabet 'slechts'

$$25 \times 23 \times 21 \times \cdots \times 3 \times 1 = \frac{26!}{2^{13} 13!} \approx 8 \text{ biljoen.}$$

Dit is niet alles! Bij elke type-aanslag verandert het electrische circuit van de Enigma en daarmee ook de codering! Dit wordt veroorzaakt doordat schakelsystemen 2, 3 en 4 (en dus ook 8, 7 en 6) uit drie rotoren bestaan, waarvan de eerste rotor bij elke type-aanslag een slag draait. D.w.z. dat als na de eerste aanslag een *C* in een *F* verandert, dan verandert na de tweede aanslag een *B* in een *E*, en na de derde een *A* in een *D*, etc. De andere rotoren hebben een ingewikkelder stap-mechanisme. Deze rotoren zijn geen vast onderdeel van de machine, maar kunnen worden verwisseld, of in een andere stand in de Enigma worden gestopt.

Dit is één van de redenen waarom de beginstand van zo'n Enigma bij het begin van een codering bekend moest zijn bij de ontvangers. Anders zou decodering onmogelijk zijn. Hoe dat in zijn werk ging, laat ik verder buiten beschouwing. Een extra complicatie voor de krakers maar ook voor de communicatie! Het stereotype menselijke gedrag van de minimale opgelegde inspanning heeft daarmee bijgedragen aan het succesvol kraken van de Enigma! Verandert ook ú niet uw wachtwoord minimaal als u dat te vaak moet doen?

Mijn studente heeft een Python-programmaatje van 500 regels geschreven om de werking van de Enigma in de computer na te spelen. Dat hielp haar om uit de verspreide literatuur te begrijpen hoe de machine werkt. Daarna hebben we ook een formule opgesteld voor de codering van het alfabet afhankelijk van de 'start' instelling, en afhankelijk van het aantal reeds gedane type-aanslagen!

Wat heb je hier aan? Niet alleen een simpeler en korter programma. Het fundamentele aspect is, dat het nu kinderspel is om de formules voor meer rotoren, of andere alfabetten te bepalen. Het 'patroon' van de codering is door het opstellen van een wiskundige formule geconcretiseerd. Uit de formule volgt direct na hoeveel type-aanslagen dezelfde codering van het alfabet weer 'terugkomt' (25×26 = 650). Het is daardoor ook mogelijk om destijds ontwikkelde kraakmethodes te doorgronden; om te onderzoeken wat het effect zou zijn van het hebben van meer rotoren; of er 'naardere' combinaties van rotoren zijn en hoe kraakbaar het zou zijn als we een Enigma computerprogramma voor codering zouden gebruiken.

Er is nog een reden waarom ik dit voorbeeld heb gekozen. Er zijn mensen die zeggen dat de werking van de Enigma allang bekend is en beschreven in o.a. de biografie van Alan Turing door Hodges [10], waarop voornoemde film gebaseerd is. Deze beschrijving is echter nog ver af van een wiskundige formule. De daarvoor belangrijke finesses kun je uit de beschrijvingen in de literatuur niet gemakkelijk opmaken. Integendeel, ondanks het feit dat mijn studente de werking van de Enigma al geprogrammeerd had, was het afleiden van de expliciete formule nog een klus van vele uurtjes. Een interessant gevolg is dat de notie 'begrip' niet universeel is. Dit compliceert het doen van interdisciplinair onderzoek, het kost een enorme tijdsinvestering en reduceert met kans één je kans op bevordering tot nul!

Stochastische besliskunde: 'Kans'-rijke voorbeelden

Meer dan de helft van de scripties die ik sinds 2010 heb begeleid betreffen onderwerpen uit de discrete dus 'kans'-loze besliskunde. Mijn specialisatie daarentegen behoort tot de 'kans'-rijke, d.w.z. stochastische besliskunde. Over stochastiek oftewel kansrekening heeft de beroemde kansrekenaar 'Mathemagicus' Persi Diaconis het volgende gezegd [11, p.vii]:

> *'Our brains are just not wired to do probability problems very well'.*

In [11] spreekt Steven Tijms over de 'tegen-intuïtieve logica van toeval'. Dit is geruststellend voor een beginnende wiskunde-student, maar maakt het belang van een gedegen theoretische basis des te groter.

Wat zijn de 'dikste' wortels van het genoemde kwaad van des-intuïtie? Ik zal dit illustreren aan de hand van rood-zwart roulette.

Gokkers Valkuil in Rood-Zwart Roulette[11, 12]. Stel we gaan een avondje gokken in het casino van Monte Carlo. Om het simpel te houden, zetten we alleen op rood of zwart in. Als we op zwart inzetten, en het balletje valt op zwart, dan hebben we gewonnen, en krijgen we onze inzet dubbel uitgekeerd (onze winst is dus gelijk aan de inzet). Als het balletje op rood valt, dan zijn we onze inzet kwijt! Omdat er 18 zwarte, 18 rode en 1 groen vakje (voor de bank) zijn, is de winstkans 18/37 en de verlieskans 1 – (18/37) = 19/37. Als we op rood inzetten, krijgen we precies het tegenovergestelde resultaat. De winst- en de verlieskansen zijn echter precies dezelfde als bij inzetten op zwart. De verlieskans is dus altijd groter dan de winstkans!

De Gokkers Valkuil is precies wat er in Monte Carlo in 1913 aan de orde was: het balletje bleef en bleef maar op zwart vallen, 1,2,3,... het hield maar niet op! De spelers raken er steeds harder van overtuigd dat het volgende balletje toch echt op rood gaat vallen, *de kans moet immers steeds groter worden dat dat gebeurt*. De inzetten op rood stijgen en stijgen, vermogens worden verloren... pas bij de 27ste keer valt het balletje op rood!

De spelers hebben zich als lemmingen linea recta in de valkuil gestort! Immers, omdat de winstkansen voor op rood inzetten en op zwart inzetten dezelfde zijn, is elk rijtje van 26 mogelijke uitslagen waarbij het balletje nooit op groen valt even waarschijnlijk! De roulette heeft geen geheugen en onthoudt echt niet, waarop ze het balletje de vorige keren heeft laten vallen! Het rijtje van 26 keer zwart is daardoor even waarschijnlijk als het rijtje met afgewisseld zwart en rood, en de kans daarop is $(18/37)^{26} < (1/2)^{26} \approx 1/64.000.000$.

Wellicht denkt u nu aan de wet van de grote aantallen. Wat zegt deze in ons geval? Als je dagen lang achter elkaar door zou spelen, dan benadert het percentage zwart en rood in het rijtje successievelijke roulette uitslagen (als we de groene uitslagen niet meetellen) steeds meer de 50%, voor bijna alle rijtjes! Is dit niet tegenstrijdig?

De finesse zit hem in dat 'bijna alle': van alle mogelijke rijtjes van 26 zwarte en rode rouletteuitslagen, is er maar eentje met alleen zwart, of met alleen rood. Er zijn er 26 met precies één rode en 25 zwarte, en omgekeerd, en er zijn er precies 325 met 2 zwarte en 24 rode. Maar van de in totaal $2^{26} \approx 64.000.000$ zwart-rood rijtjes, zijn er (met behulp van Stirling's formule) rond de 10.500.000 met evenveel zwart als rood. In de wereld van rijtjes van 26 zwarte en rode roulette-uitslagen zijn verreweg de meeste voor ongeveer de helft zwart en voor ongeveer de helft rood. De overige rijtjes worden steeds zeldzamer in aantal ten opzichte van het woud van rijtjes met gemiddeld de helft rood en zwart, naar mate de rijtjes langer worden.

Dan blijft nog de vraag: hoe onwaarschijnlijk is het dat het balletje 26 keer achter elkaar op zwart valt in een casino ergens op de wereld? In honderd jaar, met 9000 casino's die het hele jaar 24/7 open zijn, is die kans vrijwel één. Dit is een voorbeeld van de *wet van de reuze grote aantallen*, die geïntroduceerd is door Diaconis en Mosteller [12, p.79]. Misschien zouden de Intelligent Designers deze ook eens in aanmerking kunnen nemen?

Een ander bekend valkuilerig voorbeeld is: hoe groot is de kans dat een staatsloterijwinnaar een tweede keer de staatsloterij wint. Hoe groot is de kans dat iemand in Nederland in een bepaalde tijdsperiode twee keer de staatsloterij wint, zoals dat mijn eigen betovergrootvader pm. 150 jaar geleden overkwam.. Een leuk puzzeltje voor thuis?

Het volgende voorbeeld is een illustratie van de wet van de reuze grote aantallen, toegepast op een bekende gokstrategie.

Is er een winnende strategie in Rood-Zwart Roulette? Op internet kunt u de zogenaamde Martingaal-strategie als gokstrategie in rood-zwart roulette aangeprezen vinden:

- begin met 10 (euro) in te zetten;
- elke keer dat u wint, zet u 10 in;
- als u verliest, verdubbelt u de inzet. U blijft uw inzet verdubbelen tot de eerste keer dat u wint. Als u niet genoeg geld hebt voor een verdubbelde inzet, dan zet u uw resterende kapitaal in.

Stel dat u drie keer achtereenvolgens verliest en de vierde keer wint. Dan hebt u achtereenvolgens 10, 20, en 40 ingezet en dus in het totaal $10 + 20 + 40 = 70$ verloren. De vierde keer zet u 80 in, die u wint. Uw winst is dus $80 - 70 = 10$.

Laten we zo'n rij verliezende inzetten, afgesloten met een winnende inzet een 'reeks' noemen. Dan is uw winst na elke reeks 10. Omdat er met kans 1 een winnende zet komt wint u dus altijd! Maar dan zou er een winnende strategie zijn?

De Nederlandse gok-advies website Meneer Casino[13] zegt over rood-zwart gokken met een startkapitaal van €10.000:

> *"Maar er komt 100% zeker een moment dat het balletje verkeerd rolt.*
> *Tien keer achter elkaar rood komt vaker voor dan je denkt. En als dat moment komt, ben je alle winsten die je met het systeem hebt gemaakt kwijt.*
> *Meneer Casino raadt de Martingale-strategie dan ook af. En pas op: in de algemene voorwaarden van online casino Bingoal staat dat het casino je account kan sluiten en je geld in beslag kan nemen als je de Martingale gebruikt, omdat deze strategie 'fraude' zou zijn".*

Een optimistische en misleidende uitspraak! U bent na 10 keer verliezen plat gezegd platzák!

Nog sterker: u lijdt gemiddeld genomen op *elke reeks* verlies! De kans dat u achter elkaar 10 verliezende inzetten doet is weliswaar *piepklein* (0,13%), maar dan verliest u ook het *grote* kapitaal van €10.000. De grotere kans om te eindigen met de winst van €10 weegt daar niet tegenop, geheel volgens de wet van de reuze grote aantallen! Een eenvoudig sommetje laat zélfs zien dat het gemiddelde verlies per reeks groter wordt naarmate de gokker met een groter startkapitaal begint!

Onze intuïtie laat ons ook in de volgende situatie in de steek.

Bijna één pot nat: gokmodel en wachtrij. Door rood-zwart roulette te spelen, fluctueert ons kapitaal als een kansproces. Stel dat we telkens €1 inzetten. Met kans 18/37 neemt het kapitaal met één toe, en met kans 19/37 neemt het met één af. De roulette heeft geen geheugen, en dus hangen die kansen niet af van hoe vaak we al gegokt hebben, of hoe het huidige kapitaal tot stand is gekomen. Zo'n proces heet een 'Markov keten', vernoemd naar de bedenker ervan, de Russische wiskundige Andrej Markov (1856-1922). Markov ketens spelen een centrale rol in mijn onderzoek.

Uit algemene eigenschappen van Markov ketens kun je bijvoorbeeld afleiden dat de rood-zwart gokker met kans 1 blut raakt. Het duurt gemiddeld 370 gokken als je met een startkapitaal van €10 begint. Vrijwel dezelfde Markov keten kan een model voor de fluctuatie van de lengte van de rij voor een kassa of scanpunt bij de supermarkt zijn: als er per minuut met kans 18/37 een nieuwe klant in de rij aankomt, met kans 19/37 een klant klaar is met afrekenen, dan krijgen we hetzelfde kansproces als voor de fluctuatie van het kapitaal in het gokmodel. Er is wel een verschil wanneer de rij leeg is, of de gokker blut: in het wachtrijmodel komt er dan weer met kans 18/37 in de volgende minuut een klant bij de kassa! De gokker daarentegen is en blijft blut, en daardoor blijft zijn kapitaal 0.

De gemiddelde tijdsduur vanaf het moment dat de klant in de rij komt totdat hij afgerekend heeft, is ... 370/10=37 minuten! Met de formule van Little kunnen we in een handomdraai bepalen wat het gemiddelde aantal klanten bij de kassa is, en wel 37 × 18/37 = 18.

Dat is veel, en niet echt goed management van de supermarkt. De *variabiliteit* van het kansproces gooit roet in het eten. Om dit begrijpen gebruiken we dat de gemiddelde tijd tussen opeenvolgende klant-aankomsten gelijk is aan 37/18 minuut en de gemiddelde duur die de cassière nodig heeft om een klant te helpen is 37/19 minuut. Als nu precies om de 37/18 minuut een klant aan zou komen, en de bediening precies 37/19 minuut zou duren, dan zou een klant onmiddellijk geholpen worden en nooit hoeven wachten. Kans-effecten kunnen dramatische gevolgen hebben! En die dramatische gevolgen zijn erger naarmate de gemiddelde tussen-aankomsttijden en bedieningsduren minder verschillen! Intuïtief zou u dit niet verwachten, maar het is precies hetzelfde fenomeen, als waardoor files ontstaan!

Ter afsluiting de beantwoording van een standaard vraag.

Moet u altijd in de kortste rij gaan staan? De supermarkt besluit nu om een extra kassa (of scanpunt) te openen met een precies even efficiënte cassière. Het kansproces dat het aantal klanten in de rijen voor de kassa's beschrijft is nu onderhevig aan beslissingen, namelijk aan welke rij een aankomende klant wordt toegewezen. Een strategie is een toewijzingsregel van aankomende klanten, afhankelijk van de klantenaantallen bij de twee kassa's. Een optimale strategie is de regel die de gemiddelde verblijfsduur van klanten in hun rij minimaliseert. Dit is een voorbeeld van een Markov *beslissings*keten.

Van nature kiezen klanten bij aankomst bij de kassa's degene met de kortste rij! Als sinds 1977 is uit een artikel van Winston [14] bekend dat dit ook optimaal is! Hmm, hoe vaak heb ik u net als Bob den Uyl [15] in 'Een zwervend bestaan' niet horen roepen dat u altijd in de foute rij staat als u de kortste hebt gekozen? Dat klopt: twee cassières zijn zelden precies even efficiënt. Het is niet bekend wat dan de optimale strategie is, maar in elk geval niet het kiezen van de kortste!

De laatste jaren heb ik met promovendi enige technieken ontwikkeld, waarmee we hopen dit probleem voor mijn afscheids-oratie op te lossen!

Een wis en zeker fundament?

Ik heb geprobeerd u op een reisje door mijn wis-wereld mee te nemen. Aan de hand van deze ervaringen zal ik u proberen te overtuigen waarom fundamenteler beter zou zijn, wat ik daarmee bedoel en waarom ik me daar druk over maak.

In het begin van mijn verhaal heb ik u verteld dat ik toegepast wiskundige ben. Recent kwam mij de column 'Wiskundig de ware' van collega Ionica Smeets in de Volkskrant [16] onder ogen. Daarin staat dat een 'toegepast wiskundige' iemand is, die binnen een beperkte tijdsduur de beste benadering berekent van een optimale strategie voor een gegeven praktisch probleem. Een toegepast wiskundige is slechts een veredelde rekenaar? Eén van mijn studenten geeft in zijn masterscriptie een bondige karakterisatie van toegepaste wiskunde, waarvan ik denk dat die beter past bij onze onderzoekspraktijk [17]:

> *"In my view Applied Mathematics is about describing real life situations in the language of mathematics. Using this description we can provide insights in the effects of the decisions that can be made."*

Toegepast wiskundig onderzoek begint dus met het beschrijven van een probleem in wiskundige taal.

- Zo'n wiskundige beschrijving moet eenduidige aannames over het probleem bevatten, en een inzichtelijke motivatie voor de keuze ervan. Het is geen goede praktijk om voorwaardes op te leggen omwille van het gemak, of voorwaardes die niet of met grote moeite verifieerbaar zijn. Daarentegen is abstractie om de abstractie overkill.
- Voor het verwerven van een scherp inzicht is het van belang om de onderliggende wiskundige theorie grondig te beheersen. Je moet heel precies weten waarom wat waar is, en waar de rek in zit! Hierbij is het van belang om alleen maar gebruik te maken van uitspraken die je zelf ook geverifieerd hebt of waarvan je weet dat ze correct zijn. Het helpt om oude literatuur te kennen en te raadplegen. Daar kun je soms prachtige vergeten pareltjes in vinden.

In de besproken voorbeelden heb ik de zegeningen van fundamenteel onderzoek proberen te illustreren. Ik zal ze hieronder samenvatten.

Toewijzingsprobleem: het belang van de wiskundige achtergronden voor het verkrijgen inzicht in de complexiteit van een probleem bij het introduceren van extra eisen.
Enigma: beschrijving van een probleem in wiskundige taal brengt de structuur van het probleem aan het licht. Dat geeft inzicht in de eigenschappen van het probleem. Programmeren vereist niet het gedetailleerde begrip nodig voor een wiskundige beschrijving! Dat laatste vereist een gedegen wiskundige training.
Gok- en wachtrijmodellen: het belang van een abstracte scholing inzake stochastische problemen. Onze intuïtie laat ons op meerdere manieren in de steek, waardoor in de media misleidende adviezen kunnen worden gegeven. Door mathematische formulering van een probleem blijken op het oog niet verwante problemen in essentie hetzelfde te zijn.

Daarnaast is mijn ervaring uit colleges en scriptiebegeleidingen dat de theorievorming op het gebied van abstracte stochastische processen, in het bijzonder Markov processen, niet altijd eenduidig en inzichtelijk is. De beginner wordt overspoeld door een woud aan technische condities waarvan het merendeel overbodig is voor de basisstellingen. Dit obstrueert begrip meer dan dat het daartoe bijdraagt. Ditzelfde geldt voor de combinatorische speltheorie. Daar speelt bovendien nog een rol dat de argumenten dusdanig verbaal zijn, dat de verificatie van de correctheid ervan moeizamer is dan de complexiteit van het argument lijkt te rechtvaardigen.

Onderwijs en onderzoek: nu en later

Het Leidse besliskundeonderzoek was en is vooral gericht op de reeds genoemde Markov ketens en Markov beslissingsketens. In stochastisch besliskundig Nederland was dit de laatste drie decennia van de twintigste eeuw één van de actiefste onderzoeksgebieden. Met de komst van Michel Mandjes per vandaag worden de stochastische besliskunde en kansrekening in Leiden uitgebreid! Het interessante van Leiden vind ik daarnaast dat er in 2010, toen ik als éénpersoons, éénvrouwsclubje overbleef, een prachtig door Kallenberg ontwikkeld besliskunde bachelor programma lag, waarin de fundamenten werden behandeld van alle besliskunde vakken die in ons nationale wiskunde masterprogramma werden en worden gegeven.

Het is een populaire richting: ik schat dat ruim 10% van alle bachelor en master afstudeerprojecten door besliskunde-handen gaan! Daarvan is meer dan de helft 'kans'-loos, d.w.z. discreet georiënteerd! Met mijn emeritaat over twee jaar dreigt deze laatste richting te verdwijnen, tenzij er een geschikte opvolger gevonden kan en mag worden. Het is namelijk niet zo dat een stochastische collega er een extra vakgebied 'zo maar eventjes' bij doet. Elementaire colleges geven, allá, scripties begeleiden vergt toch iets meer inspanning en kennis van zaken!

Natuurlijk is niets voor de eeuwigheid, behalve de volgorde van de letters van het alfabet en het decimale stelsel. Het is desalniettemin wel van belang om een zo 'breed' mogelijk wiskundeprogramma te blijven aanbieden: een talent hebben voor discrete besliskunde is vaak heel wat anders dan talent hebben voor de stochastische kant.

Tot mijn verrassing is een oud-student van mij volgens één van mijn collega's een 'rising star' in het rooster-software bureau waar hij werkt, maar hij was geen opvallende student in de stochastische besliskunde. Daarentegen had ik 10 jaar geleden een wis- en natuurkundestudent die bewust een stage had gekozen op het gebied van de veranderende structuur van ons energienetwerk door de overgang naar schone energie. Hij wist een onderhouds-strategie te ontwikkelen voor het Westland, waardoor de 'return on investment' tijd van investeringen in bijvoorbeeld kabels omlaag is gegaan [17]. Dit is een stochastisch probleem. Discrete problemen waren hoegenaamd niet aan hem besteed, en hij werkt al jaren aan problemen rond het energienetwerk bij T.N.O.

Wat betreft onderzoek zijn er op dit moment maatschappelijk uitdagende problemen. Markov Beslissingsketens zijn een onderdeel van 'Reinforcement Learning', dat weer tot de Machine Learning (afgekort: ML) behoort. ML is "een vorm van Kunstmatige Intelligentie die gericht is op het bouwen van systemen die van de verwerkte data kunnen leren of data gebruiken om beter te presteren" [18]. Het is een enorme hype geworden, die aangezwengeld is door het succes van AlphaGo, het op AI gebaseerde programma dat voor het eerst de mens in Go versloeg. Theoretisch onderzoek naar het waarom, wanneer en hoe goed ML algoritmes werken is moeilijk en blijft achter bij het gebruik ervan. Eén van mijn statistische collega's heeft onderzoek gedaan, waaruit blijkt dat er gebrek is aan goede validatie en calibratie van ML modellen. Dit is daarom een uitdagend en relevant fundamenteel probleem, zeker in het licht van mogelijk grote investeringen op grond van resultaten van ML algoritmes.

Een andere uitdagende richting betreft de wachttijdtheorie. Lange tijd (sinds het ontstaan ervan in begin van de vorige eeuw bij het ontwerp van telefooncentrales) werd er alleen maar uitgegaan van 'brave' klanten. Nu zult ú vast naar een andere rij overlopen wanneer u denkt dat deze sneller is, of u gooit de hoorn op de haak als u te lang in een telefonische wachtrij zit. Als u dat doet bent u een 'strategische klant'! In de besliskundegroep wordt momenteel ook onderzoek gedaan aan modellen waarin klanten ook strategisch gedrag mogen vertonen. Dit introduceert een speltheoretisch element in de modellen.

Ik zou zelf in de toekomst graag problemen rond het verschil tussen 'sociaal optimum' en 'individueel optimum' bestuderen. Hoe zou je prikkels kunnen introduceren opdat het individuele optimum ook sociaal optimaal is? Ook dit is niet nieuw, maar het lijkt alsof er in de huidige maatschappij meer gestuurd wordt op individuele optima dan op sociale. Voor een individu is het optimaal om van alles over internet te bestellen, en gratis terug te kunnen sturen, waarna de teruggestuurde producten worden vernietigd. Duurzaamtechnisch is dat zeker niet het geval!

Call centres hanteren bij voorbeeld vaak de 80-20 regel als gewenst minimaal service niveau, dat wil zeggen dat minstens 80% van de klanten binnen hooguit 20 seconden in gesprek moet komen met een medewerker! Hoe zou u de volgende klant uit de telefonische wachtrij selecteren, als u beoordeeld wordt op het halen van dit service niveau? Zou u klanten die al langer dan die 20 seconden in de rij staan niet genadeloos lekker laten blijven wachten? Zo'n klant kan dus beter ophangen en opnieuw bellen. Leuk om straks in de receptie-rij te bespreken. Ik raad u echter aan om niet lijdzaam in de rij te blijven staan, maar uw individuele optimum te volgen!

In mijn werkzame leven ben ik regelmatig actief geweest in bestuurlijke kringen. Ik moest mijn weg zoeken als landelijk eerste vrouwelijke wiskunde OD en als eerste vrouwelijke WD in de Leidse Faculteit W&N, ook al was dat interim. Waar een man een stevig standpunt mag hebben, wordt een vrouw met een eigen mening als agressief of onprofessioneel weggezet door een hogere bestuurder, en zij moet dat maar braaf slikken. Het ligt mij nog zwaar op de maag dat ik samen met mijn vrouwelijke compaan in het management team anderhalf jaar geleden ben afgezet, en niet wegens slecht functioneren. Het was soms een toer om inspiratie te vinden, hoe met bepaalde situaties om te gaan.

Een inspirerend voorbeeld was Prof. Willem van Zwet. Als dekaan van de Faculteit W&N moest hij rond 1980 een reorganisatie doorvoeren waarbij drie van mijn wiskunde-docenten werden ontslagen. Eén daarvan kon rechter worden, voor de twee anderen heeft hij zich persoonlijk ingezet om een andere baan te vinden binnen hun expertiseveld en hun interesse. Dat is hem, maar natuurlijk, gelukt. Exemplarische nazorg avant la lettre en hoe je als bestuurder met je verantwoordelijkheden om zou kunnen gaan! Altijd bereid om als bestuurder met iedereen de discussie aan te gaan en te luisteren. Voor mij een bestuurlijk rolmodel. Het zou fijn zijn om af en toe een blik op zijn portret aan de muur te kunnen werpen, en ook dat van anderen aan wie ik fijne herinneringen heb. Ik mis onze oude-witte-mannen portretten.

Mogelijk is de verwijdering van deze portretten een individueel optimum voor sommige collega's en studenten. Ik zou een sociaal optimum willen voorstellen: dat van de omgekeerde beeldenstorm. Geen verwijdering, maar toevoeging van portretten van alumni 'waar wij trots op zijn', zoals

- Tatjana van Aardenne-Ehrenfest, die voor de oorlog als wiskundige in Leiden is gepromoveerd, maar als huisvrouw geen baan mocht hebben. Van Zwet sprak altijd met veel enthousiasme over haar scherpe vragen tijdens colloquia, waar iedereen voor rilde;

- Ronald Venetiaan, oud-student wiskunde in Leiden en 15 jaar president van Suriname;

- zijn dochter Shanti Venetiaan, oud-studente wiskunde in Leiden, doctor in de wiskunde in Suriname, huidige rector van de Anton de Kom-universiteit en hoogleraar wiskundige statistiek, en in alledrie de eerste vrouw in onafhankelijk Suriname.

Wist u dat de eerste twee vrouwelijke wiskunde-hoogleraren in Nederland pas in 1980 werden benoemd? Dat waren Ietje Paalman-de Miranda, in Suriname geboren, en Ruth Curtain, een Australische.

We zouden als universiteit onze Indische, Surinaamse en Caribische alumni die naar Nederland zijn gekomen om te studeren uit onze annalen kunnen de-anonymiseren, zoals sultan Henkie, onafhankelijkheidsstrijder en later sultan van Djokja, en die vele anderen die aan onze universiteit gestudeerd hebben en iets voor hun eigen landen betekend hebben.

Dankwoord

Referenties

[1] D. Erasmus *De Lof der Zotheid*, Vertaling van A. Dirkzwager en A.C. Nielson. H.J. Paris, Amsterdam, 1960.

[2] M. Kac, *Enigmas of Chance. An Autobiography.* University of California Press, Berkeley, 1987.

[3] C.B. Boyer en U.C. Merzbach, *A History of Mathematics*. 2de druk, John Wiley & Sons, New York, 1989.

[4] L.E. Sigler, *Fibonacci's Liber Abaci. A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation.* Springer-Verlag, New York, 2002.

[5] G.W. von Leibniz, Explication de l'Arithmétique Binaire, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, pp. 85–89, Paris, 1703.

[6] L.C.M. Kallenberg, *U kunt wel gaan*. Afscheidsrede, 2010.

[7] J. Fabius en W.R. van Zwet, *Grondbegrippen van de Waarschijnlijkheidsrekening.* 3de druk, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980.

[8] J. Mourits, *Het bachelorseminarium als toewijzingsprobleem*. Bachelorscriptie, UL, 2019.

[9] I. Dekkers, *The enigma behind the Enigma Machine*. Masterscriptie, UL, 2023.

[10] A. Hodges, *Alan Turing: The Enigma*. Princeton University Press, 2014.

[11] S. Tijms, *Chance, Logic and Intuition. An Introduction to the Counter-Intuitive Logic of Chance*. World Scientific Publishing Company, Singapore, 2021.

[12] H. Tijms, *Suprises in Probability. Seventeen Short Stories.* CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2019.

[13] Online casino tips https://meneercasino.com/online-casino-tips/roulette-strategie-systemen

[14] W. Winston, Optimality of the Shortest Line Discipline. *Journal of Applied Probability*, **14**, 181–189, 1977.

[15] B. den Uyl, *Een zwervend bestaan*, Querido, Amsterdam, 1977.

[16] I. Smeets, Wiskundig de Ware. Column *Ionica antwoordt met wiskunde*, Volkskrant, 23 juli 2023.

[17] N. Jansen, *Reduction of Return on Investment Time and Failures in the Distribution Grid by Measuring Temperature and Current on Cable Joints*. Masterscriptie UL, 2014.

[18] What is machine learning? https://www.oracle.com/nl/artificial-intelligence/machine-learning/what-is-machine-learning/

Prof. dr. Flora M. Spieksma

Foto: Hielco Kuipers

Flora ('Floske') Spieksma (1958) studeerde Spaans en Wiskunde aan de Universiteit Leiden.
Zij promoveerde in 1990 op een proefschrift over Markov(beslissings) ketens en Wachttijdtijdtheorie en trad daarna toe tot de staf van het Mathematisch Instituut.

Naast haar wetenschappelijk onderzoek en een aantal bestuurlijke activiteiten stak zij veel energie in het onderwijs, vooral in de begeleiding van bachelor- en master-afstudeerprojecten op het gebied van zowel de discrete als de stochastische besliskunde.
In 2021 werd zij benoemd tot hoogleraar Mathematische Besliskunde.

Spieksma is op dit moment ook lid van de Unversiteitsraad, en lid van de redacties van Annals of Operations Research en Naval Research Logistics.

Universiteit Leiden