Intermittency and number expansions for random interval maps

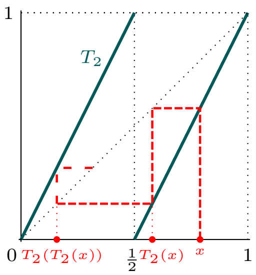
Zeegers, B.P.

Samenvatting

In dit proefschrift staat het gedrag van stochastische intervalafbeeldingen centraal. Een intervalafbeelding $T : [0,1] \to [0,1]$ is een functie die ieder getal x in $[0,1]$ stuurt naar een getal $T(x)$ in $[0,1]$ (dat afhangt van x). Door een intervalafbeelding herhaald toe te passen krijgen we zogeheten banen. Dit zijn rijtjes van de vorm

$$x, \quad T(x), \quad T(T(x)), \quad T(T(T(x))), \quad \cdots.$$

Een voorbeeld van een intervalafbeelding is de functie T_2 gegeven door $T_2(x) = 2x$ voor $0 \leq x < \frac{1}{2}$ en $T_2(x) = 2x - 1$ voor $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. De baan onder T_2 van bijvoorbeeld $x = \frac{15}{19}$ kan dan als volgt worden gevisualiseerd:

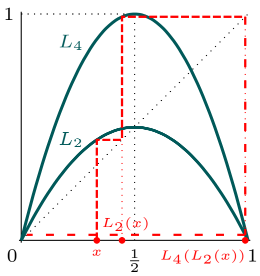


Intervalafbeeldingen zijn voorbeelden van *deterministische* discrete dynamische systemen. Dit zijn systemen waarvan de toestand verandert in tijdstappen en wordt bepaald door één functie T. Een toestand x wordt dan opgevolgd door toestand $T(x)$.

Een *stochastische* intervalafbeelding daarentegen is een dynamisch systeem waarbij er een *collectie* functies beschikbaar is en waaruit per tijdstap één functie wordt gekozen met een bepaalde kans. Een voorbeeld van zo'n systeem: kies per tijdstap met kans p de intervalafbeelding L_2 gegeven door $L_2(x) = 2x(1-x)$ voor $0 \leq x \leq 1$ en met kans $1-p$ de intervalafbeelding L_4 gegeven door $L_4(x) = 4x(1-x)$ voor $0 \leq x \leq 1$. Dit kan bijvoorbeeld de volgende baan opleveren:

$$x, \quad L_2(x), \quad L_4(L_2(x)), \quad L_2(L_4(L_2(x))), \quad \cdots,$$

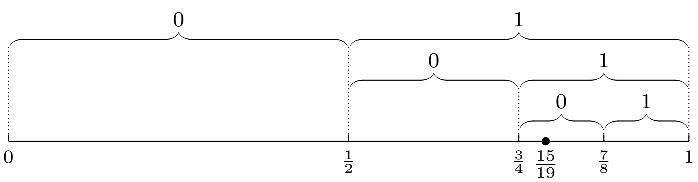
wat voor bijvoorbeeld $x = \frac{1}{3}$ als volgt kan worden gevisualiseerd:



Dit voorbeeld van een stochastische intervalafbeelding is speciaal in de zin dat het *kritisch intermitterend* gedrag vertoont, een verschijnsel waar we in het eerste deel van dit proefschrift in geïnteresseerd zijn. In dat geval wisselen banen tussen periodes van chaotisch en stabiel gedrag als gevolg van de wisselwerking tussen een *superaantrekkend vast punt* en een *afstotend vast punt* in het systeem. In bovenstaand voorbeeld is 0 een afstotend vast punt onder L_2 en L_4 omdat $L_2(0) = L_4(0) = 0, L_2'(0) > 1, L_4'(0) > 1$ en is $\frac{1}{2}$ een superaantrekkend vast punt onder L_2 omdat $L_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $L_2'(\frac{1}{2}) = 0$. Doordat $L_4(\frac{1}{2}) = 1$ en $L_2(1) = L_4(1) = 0$ kent een baan onder dit systeem gewoonlijk periodes van chaotisch gedrag die worden afgewisseld met stabiele periodes dicht bij 0.

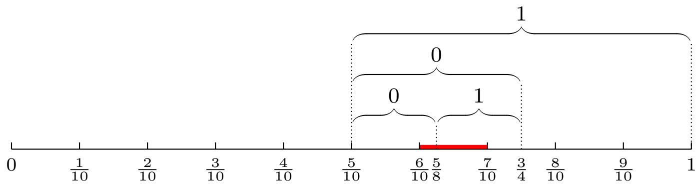
In Hoofdstuk 2 beschouwen we een brede klasse van stochastische intervalafbeeldingen die kritisch intermitterend zijn. We bewijzen onder meer onder welke voorwaarden er wel of geen *absoluut continue invariante kansmaat* bestaat. Het al dan niet bestaan hiervan geeft aan dat respectievelijk het chaotische dan wel stabiele gedrag in het systeem overheerst. In het bovenstaande voorbeeld met L_2 en L_4 bestaat zo'n kansmaat bijvoorbeeld dan en slechts dan als de kans p dat L_2 wordt gekozen kleiner is dan $\frac{1}{2}$. In Hoofdstuk 3 leiden we voor een klasse kritisch intermitterende systemen statistische eigenschappen af die karakteristiek zijn voor intermitterende systemen. Zo vinden we voor een klasse van *testfuncties* dat indien een absoluut continue invariante kansmaat bestaat *correlaties* polynomiaal snel naar nul gaan en geven we voorwaarden wanneer voor deze systemen een bepaalde vorm van de *Centrale Limietstelling* geldt. Tenslotte bewijzen we in Hoofdstuk 4 dat soortgelijke resultaten als in Hoofdstuk 2 over het bestaan van een absoluut continue invariante kansmaat ook gelden voor een intermitterend systeem waarbij de mate van zowel aantrekking als afstoting van de vaste punten met een orde van grootte is verlaagd.

In het tweede deel van dit proefschrift kijken we naar getalsontwikkelingen gegenereerd door stochastische intervalafbeeldingen. Getalsontwikkelingen zijn een manier om getallen uit te drukken door middel van een specifieke verzameling symbolen of cijfers. Het meeste bekende voorbeeld is de decimale ontwikkeling, waarbij getallen worden uitgedrukt met de cijfers $0, 1, \ldots, 9$. De decimale ontwikkeling van bijvoorbeeld $\frac{15}{19}$ is $0.78947\cdots$. Een ander bekend voorbeeld is de binaire ontwikkeling, waarbij alleen de cijfers 0 en 1 worden gebruikt. De cijfers in de binaire ontwikkeling van een getal x in $[0, 1)$ kunnen als volgt worden bepaald. Deel het interval $[0, 1)$ op in twee helften. Dan is het eerste cijfer in de binaire ontwikkeling van x gelijk aan 0 als x kleiner is dan het grenspunt $\frac{1}{2}$ en anders 1. Deel nu de helft waarin x zich bevindt verder op in twee helften. Dan is het tweede cijfer gelijk aan 0 als x kleiner is dan het grenspunt dat de twee helften scheidt en anders 1. Enzovoorts. Op deze manier vinden we bijvoorbeeld dat de eerste drie cijfers in de binaire ontwikkeling van $\frac{15}{19}$ gelijk zijn aan respectievelijk 1, 1 en 0:



In plaats van bovenstaande methode kunnen de cijfers in de binaire ontwikkeling van een getal x in $[0,1)$ ook worden bepaald door de baan van x onder de intervalafbeelding T_2 te volgen. Het eerste cijfer is dan 0 als x kleiner is dan $\frac{1}{2}$ en anders 1, het tweede cijfer is 0 als $T_2(x)$ kleiner is dan $\frac{1}{2}$ en anders 1, het derde cijfer is 0 als $T_2(T_2(x))$ kleiner is dan $\frac{1}{2}$ en anders 1, enzovoorts. Voor bijvoorbeeld $x = \frac{15}{19}$ zien we (door twee pagina's terug te bladeren) dat dit inderdaad opnieuw de ontwikkeling $1, 1, 0, \cdots$ oplevert. We zeggen dat T_2 de binaire ontwikkeling *genereert*. Behalve de binaire ontwikkeling kunnen veel soorten getalsontwikkelingen worden gegenereerd door intervalafbeeldingen, waaronder ook de decimale ontwikkeling. Ook stochastische intervalafbeeldingen kunnen getalsontwikkelingen genereren door op eenzelfde manier de banen te volgen en cijfers toe te kennen aan specifieke deelintervallen.

Als we een deel van de cijfers in een getalsontwikkeling van een getal x in $[0,1)$ kennen, dan geeft dit informatie over de locatie van x in $[0,1)$. Als we bijvoorbeeld weten dat het eerste cijfer in de decimale ontwikkeling van een verder onbekend getal x in $[0,1)$ gelijk is aan 6, dan weten we dat x zich bevindt tussen $\frac{6}{10}$ en $\frac{7}{10}$. Voor dit voorbeeld kunnen we dan de eerste twee cijfers in de binaire ontwikkeling van x bepalen, maar niet meer cijfers:



Bovenstaande laat zien dat x in het deelinterval ligt dat bestaat uit getallen waarvan de binaire ontwikkeling begint met respectievelijk de cijfers 1 en 0, maar dat het niet duidelijk is of het derde cijfer in de binaire ontwikkeling van x een 0 of een 1 is omdat we niet weten of x kleiner of groter is dan $\frac{5}{8}$. Meer in het algemeen kunnen we de volgende vraag stellen: Stel we weten de eerste n cijfers in een getalsontwikkeling van een verder onbekend getal x in $[0,1)$. Hoeveel cijfers kunnen we dan bepalen in een andere getalsontwikkeling van x? Dit vraagstuk is tot op zekere hoogte opgelost voor het geval dat n heel groot is en decimale ontwikkelingen worden vergeleken met zogeheten reguliere kettingbreuken. Dit staat bekend als de *Stelling van Lochs*.

In Hoofdstuk 5 breiden we het resultaat van de stelling van Lochs uit naar een brede klasse van paren getalsontwikkelingen die worden gegenereerd door stochastische intervalafbeeldingen. Bovendien bewijzen we een bijbehorende Centrale Limietstelling. Tenslotte bestuderen we in Hoofdstuk 6 een vraagstuk dat gerelateerd is aan de stelling van Lochs in de context van zogeheten β-encoders. De resultaten in dit hoofdstuk geven inzicht in de mate van geschiktheid van β-encoders als *pseudo-toevalsgeneratoren*.