



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Travelling waves on trees and square lattices

Jukic, M.

Citation

Jukic, M. (2022, September 22). *Travelling waves on trees and square lattices*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/3463735>

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/3463735>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

SAMENVATTING

In dit proefschrift bestuderen we bistabiele reactie-diffusievergelijkingen op multidimensionale roosterdomeinen, zoals k -voudige bomen en \mathbb{Z}^2 . De kracht van reactie-diffusievergelijkingen is dat ze met hun intuïtieve en relatief eenvoudige vorm met succes verschillende natuurlijke en sociale fenomenen kunnen modelleren. Een van de belangrijkste kenmerken van reactie-diffusievergelijkingen is dat ze speciale oplossingen toelaten, zogenaamde ‘lopende golven’, die we kunnen omschrijven als vaste profielen $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ welke zich in een bepaalde richting bewegen met een vaste snelheid c . Afhankelijk van hun vorm kunnen we golven grofweg in drie categorieën verdelen:

- pulsen of solitonen, die kunnen worden omschreven als lokale verstoringen
- periodieke pulsen (golftreinen)
- golffronten die twee constante toestanden verbinden

In dit proefschrift richten we ons op het laatste type golf en bestuderen we hun existentie, propagatie en lange-termijn gedrag op twee soorten discrete domeinen - het twee- dimensionaal rooster \mathbb{Z}^2 en oneindige bomen.

Hoofdstuk 1 bevat een overzicht van het proefschrift. In het overzicht gaan we onder meer in op verschillen tussen lopende golven op continue domeinen en op roosterdomeinen. Specifieke aandacht besteden we verder aan het fenomeen van ‘pinning’, ook wel ‘propagation failure’ genoemd.

In Hoofdstuk 2 beschouwen we de bistabiele reactie-diffusievergelijking op het rooster \mathbb{Z}^2 . Deze vergelijking wordt ook vaak *de Allen-Cahn vergelijking* genoemd. Onze basisaanname is dat de begintoestand u^0 een verstoring is van de golf Φ die zich in horizontale richting beweegt. In het eerste deel van dit werk nemen we niet aan dat u^0 een gelokaliseerde of ‘kleine’ verstoring van de golf is, maar dat het alleen voldoet aan de zwakkere voorwaarde (C1) geformuleerd in (1.7.6). Deze aanname is al voldoende om te garanderen dat er een eendimensionale differentiaalvergelijking bestaat die het gedrag van het *nulniveau-oppervlak* $\gamma(t)$ van onze oplossing $u(t)$ regelt. We noemen deze differentiaalvergelijking een *discrete mean curvature flow* met een driftterm. Met behulp van de Cole-Hopf-transformatie zijn we in staat om deze vergelijking om te zetten in de discrete warmtevergelijking op \mathbb{Z} om aan te tonen

dat het nulniveau-oppervlak $\gamma(t)$ na verloop van tijd gladder wordt en dat het langetermijn gedrag van onze oplossing wordt bepaald door de lopende golf $\Phi(\cdot - \gamma(t))$. In het tweede deel van dit hoofdstuk laten we zien dat $\gamma(t)$ convergeert naar $ct + \mu$, voor zekere $\mu \in \mathbb{R}$, wat de orbitale stabiliteit van de horizontale lopende golf aantoont.

Hoofdstuk 3 is een generalisatie van ons werk van hoofdstuk 2 naar rationale richtingen op \mathbb{Z}^2 , d.w.z. we nemen nu aan dat u^0 een verstoring is van de golf die in een bepaalde richting $(\sigma_h, \sigma_v) \in \mathbb{Z}^2$ beweegt. De setting is vergelijkbaar met dat in hoofdstuk 2. Echter, vanwege het feit dat onze golf niet meer parallel is aan het rooster, komen we meer technische problemen tegen. Een van deze problemen is dat de heersende vergelijking voor het nulniveau-oppervlak $\gamma(t)$ niet via de Cole-Hopf-transformatie transformeert naar de discrete warmtevergelijking, maar naar een lineaire rooster-vergelijking die zowel negatieve als asymmetrische coëfficiënten heeft. We behandelen deze vergelijking en zijn vervalschattingen in detail in §3.5.

In Hoofdstuk 4 verlaten we het tweedimensionale rooster om golfvoortplanting en het gebrek daaraan te bestuderen op oneindige k -voudige bomen. Om het bestaan van het pinning-gebied dat chaotische oplossingen omvat aan te tonen, gebruiken we de stelling van Moser uit het veld van de symbolische dynamiek. Aan de andere kant zijn we ook geïnteresseerd in welke parameterregimes de bewegende golven zich terugtrekken ($c < 0$) of juist verspreiden ($c > 0$). Daarom passen we het vergelijkingsprincipe toe met twee soorten suboplossingen: steile, stapvormige profielen die de golven dichter bij het pinninggebied benaderen, en brede profielen die laten zien dat voor $d \gg 0$ de golf zich altijd terugtrekt, ongeacht de waarde van de bistabiele parameter a .