Complex multiplication constructions of abelian extensions of quartic fields

Asuncion, J.G.

Co-supervised thesis presented to obtain the qualification of

DOCTOR OF THE UNIVERSITY OF BORDEAUX
AND LEIDEN UNIVERSITY

Doctoral School of Mathematics and Computer Science

Specialization: Pure Mathematics

by

JARED ASUNCION

Complex multiplication constructions of abelian extensions of quartic fields

Under the supervision of Andreas Enge and Marco Streng

Defense on: 24 may 2022

Members of the examination panel:

Mr. David KOHEL	Professor, Aix-Marseille Université	President
Mr. Claus FIEKER	Professor, Technische Universität Kaiserslautern	Referee
Mr. David KOHEL	Professor, Aix-Marseille Université	Referee
Mrs. Sorina IONICA	Maître de conférences, Université de Picardie	Examiner
Mr. Ronald VAN LUIJK	Professor, Universiteit Leiden	Examiner
Mr. Andreas ENGE	Directeur de recherche, INRIA	Co-director
Mr. Marco STRENG	Associate Professor, Universiteit Leiden	Co-director

Title: Complex multiplication constructions of abelian extensions of quartic fields

Abstract: Let (K, Φ) be a primitive quartic CM pair and (K^r, Φ^r) be its reflex. In a 1962 article titled *On the class-fields obtained by complex multiplication of abelian varieties*, Shimura considered a particular family $\{F_{K^r}(m) : m \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ of abelian extensions of K, and showed that the Hilbert class field $H_{K^r}(1)$ of K is contained in $F_{K^r}(m)$ for some positive integer m. In this thesis, we make this m explicit. We also give a way to determine, given a positive integer n, whether or not $H_{K^r}(1) \subseteq F_{K^r}(n)$. In addition, we show a way to compute defining polynomials of the extension $F_{K^r}(n)/K^r$ for any positive integer n. We also give an algorithm that computes a set of defining polynomials for the Hilbert class field $H_{K^r}(1)$ using information on $F_{K^r}(m)$. Our proof-of-concept implementation of this algorithm computes a set of defining polynomials much faster than current implementations of the generic Kummer algorithm for certain examples of quartic CM fields.

Keywords: complex multiplication, CM fields, Hilbert class fields

Title: Constructions de multiplication complexe d'extensions abéliennes de corps quartiques

Abstract: Soit (K, Φ) une paire CM quartique primitive et (K^r, Φ^r) son réflexe. Dans un article de 1962 intitulé *On the class-fields obtained by complex multiplication of abelian varieties*, Shimura considère une famille particulière $\{F_{K^r}(m) : m \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ d'extensions abéliennes de K, et montre que le corps de classe Hilbert $H_{K^r}(1)$ de K est contenu dans $F_{K^r}(m)$ pour un certain entier positif m. Dans cette thèse, nous donnons une valeur explicite de cet entier m. Nous donnons également un moyen de déterminer, étant donné un entier positif n, si $H_{K^r}(1) \subseteq F_{K^r}(n)$ ou non. De plus, nous donnons une manière de calculer les polynômes de définition de l'extension $F_{K^r}(n)/K^r$ pour tout entier positif n. Nous donnons également un algorithme qui calcule un ensemble de polynômes de définition pour le corps de classes de Hilbert $H_{K^r}(1)$ en utilisant des informations sur $F_{K^r}(m)$. Nous avons implanté cet algorithme et nous calculons un ensemble de polynômes de définition beaucoup plus rapidement que les implantations actuelles de l'algorithme générique de Kummer pour certains exemples de corps CM quartiques.

Keywords: multiplication complexe, corps CM, corps de classes de Hilbert

Institut de Mathématiques de Bordeaux UMR 5251
Université de Bordeaux
351, cours de la Libération - F 33 405 TALENCE

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Niels Bohrweg 1 2333 CA Leiden

Complex multiplication constructions of abelian extensions of quartic fields

Proefschrift

ter verkrijging van
de graad van doctor aan de Universiteit Leiden,
op gezag van rector magnificus prof. dr. ir. H. Bijl,
volgens besluit van het college voor promoties
te verdedigen op dinsdag 24 mei 2022
klokke 11:15 uur
door

Jared Guissmo Asuncion

geboren te Mandaluyong, de Filipijnen
in 1992

Promotores:

prof. dr. Andreas Enge (INRIA)
prof. dr. Peter Stevenhagen

Copromotor:

dr. Marco Streng

Promotiecommissie:

prof. dr. Bas Edixhoven †
prof. dr. Claus Fieker (Technische Universität Kaiserslautern)
dr. Sorina Ionica (Université de Picardie)
prof. dr. David Kohel (Aix-Marseille Université)
prof. dr. Ronald van Luijk

This work was funded by a cotutelle program between
Leiden University and University of Bordeaux.

Contents