



Universiteit
Leiden

The Netherlands

Tautological differential forms on moduli spaces of curves

Lugt, S. van der

Citation

Lugt, S. van der. (2022, April 12). *Tautological differential forms on moduli spaces of curves*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/3282007>

Version: Publisher's Version

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/3282007>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Samenvatting

Tautologische differentiaalvormen op moduliruumtes van krommen

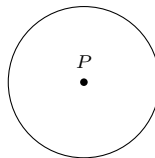
Het bestuderen van moduliruumtes zou opgevat kunnen worden als de wiskundige variant van de taxonomie uit de biologie. Waar een bioloog bijvoorbeeld zou proberen om alle verschillende soorten vinken op de Galapagoseilanden te vinden, zo zou een wiskundige geïnteresseerd kunnen zijn in het vinden van alle wiskundige objecten van een bepaald type. Bij zo'n classificatie kan men gebruik maken van moduliruumtes: meetkundige objecten waarvan de punten één-op-één overeenkomen met de objecten die we willen classificeren.

Bijvoorbeeld: door alle getallen op volgorde achter elkaar te leggen, verkrijgen we een lijn, de *getallenlijn*:

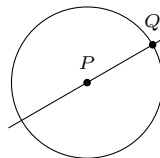


De punten op de getallenlijn komen één-op-één overeen met de getallen. Daarom is de getallenlijn een *moduliruumte* van alle getallen.

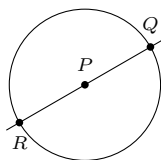
Laten we nu proberen om alle lijnen in het vlak die door een bepaald punt gaan te classificeren. Laat P een punt in het vlak zijn, en stel dus dat we alle lijnen in het vlak door P willen classificeren. We gaan dus op zoek naar een moduliruumte voor lijnen door P . Teken nu een cirkel rond P die P als middelpunt heeft:



Als nu Q een punt op deze cirkel is, dan krijgen we een lijn door P door een lijn door P en Q te trekken:



Andersom kan iedere lijn door P op deze manier worden verkregen. We lijken dus een moduliruimte te hebben gevonden voor alle lijnen door P . Toch is deze cirkel géén moduliruimte. Immers, als deze cirkel wél een moduliruimte zou zijn, dan zouden de punten op deze cirkel één-op-één overeen moeten komen met lijnen door P . Maar neem twee punten P en Q die aan weerszijden van de cirkel liggen:

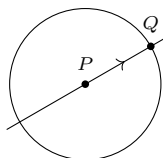


De lijn door P en Q en de lijn door P en R zijn hetzelfde! De overeenkomst tussen punten op de cirkel en lijnen door P is dus ‘twee-op-één’, in plaats van één-op-één: er zijn steeds tweetallen punten die dezelfde lijn geven.

Hoe krijgen we nu een moduliruimte van alle lijnen door P ? Eén manier is het toekennen van extra structuur aan de lijnen die we willen classificeren. We kunnen bijvoorbeeld proberen te kijken naar lijnen door P met een *richting*. Iedere lijn in het vlak heeft twee richtingen:



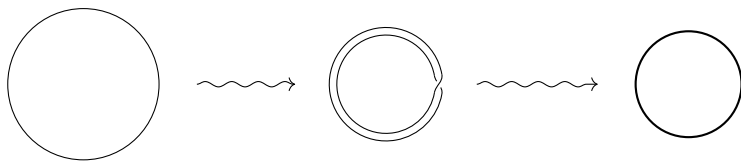
Als we nu een punt Q op de cirkel rond P hebben, dan tekenen we de lijn door P en Q in de richting van P naar Q :



De lezer kan nu nagaan dat twee punten aan weerszijden van de cirkel weliswaar twee dezelfde lijnen opleveren, maar dat de richtingen van deze lijnen verschillen. Punten op de cirkel komen dus één-op-één overeen met lijnen door P met een richting. We vinden dus dat de cirkel rond P een moduliruimte is voor de lijnen door P met een richting.

Deze manier, dus het toekennen van extra structuur aan objecten zodat hun moduliruimte eenvoudiger te beschrijven is, heet *rigidificatie*. Dit is een techniek die wiskundigen vaak gebruiken als ze moduliruimtes van ingewikkelde objecten willen bestuderen.

Maar wat als we geen extra structuur willen toekennen aan de objecten die we aan het classificeren zijn? Als we alleen geïnteresseerd zijn in lijnen door P , en helemaal niet in lijnen door P met een richting, dan kunnen we ook een andere techniek gebruiken. Manipuleer de cirkel als volgt: pak de cirkel van het vlak, draai de cirkel vervolgens een keer ‘om zichzelf’ heen, en plak de twee ‘takken’ nu aan elkaar vast:



We krijgen zo een nieuwe cirkel. Ieder tweetal tegenover elkaar liggende punten uit de oude cirkel worden in de nieuwe cirkel samengeplakt tot één punt. Oftewel: ieder punt op de nieuwe cirkel correspondeert met twee punten op de oude cirkel die tegenover elkaar liggen, en deze twee punten geven dezelfde lijn door P . Er is dus een één-op-één overeenkomst tussen punten op de nieuwe cirkel en lijnen door P , en de nieuwe cirkel is dus een moduliruimte voor de lijnen door P .

We nodigen de lezer uit om bovenstaande constructie zelf uit te voeren. Neem een vel papier, een paar stiften in verschillende kleuren, en een elastiek. Teken op het vel papier een punt, en leg het elastiek hier als een cirkel omheen. Kies nu voor iedere stift een tweetal punten aan weerszijden van het elastiek, en markeer deze punten met dezelfde kleur. Pak vervolgens het elastiek, en draai het elastiek een keer om zichzelf heen zoals in bovenstaande afbeelding. U zult zien dat alle tweetallen punten met dezelfde kleur nu op elkaar worden gelegd.

Het ‘oprollen’ van een meetkundig object om een nieuw meetkundig object te verkrijgen is ook een techniek die veel wordt toegepast door wiskundigen. Ze noemen deze techniek het nemen van een *quotiënt*.

In dit proefschrift bestuderen we de moduliruimte van bepaalde meetkundige objecten, namelijk compacte Riemannoppervlakken van geslacht g . Bovendien bestuderen we de differentiaalvormen die op deze moduliruimte leven. In Hoofdstuk 1 bespreken we theorie over submersies van variëteiten, families van compacte Riemannoppervlakken, en hermitische lijnbundels op deze families. We construeren hier enkele canonieke hermitische lijnbundels en geven canonieke isometrieën tussen deze lijnbundels. In Hoofdstuk 2 bekijken we de moduliruimte van compacte Riemannoppervlakken van geslacht g . We bespreken dat er geen ‘mooie’ moduliruimte bestaat, maar dat dit probleem te verhelpen is door te rigidificeren, of door quotiënten te nemen. In Hoofdstuk 3 bekijken we *gemarkeerde grafen*. Dit zijn grafen waarvan een aantal knopen is gemarkeerd met positieve gehele getallen. Deze grafen kunnen worden samengetrokken, en we laten zien dat er formules kunnen worden gegeven voor het aantal samengetrokken gemarkeerde grafen van iedere gegeven karakteristiek in termen van het aantal gemarkeerde knopen. Tot slot bestuderen we in Hoofdstuk 4 *tautologische differentiaalvormen* op de moduliruimte. Met behulp van de gemarkeerde grafen uit Hoofdstuk 3 kunnen we laten zien dat er niet ‘te veel’ van deze tautologische differentiaalvormen zijn, en we berekenen enkele relaties tussen deze tautologische differentiaalvormen.