



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Wiskunde stoffig?!

Por, A.S.

Citation

Por, A. S. (2021). Wiskunde stoffig?!. *Wonderkamer: Magazine Voor Wetenschapsgeschiedenis*, 4, 61-66. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/3278580>

Version: Publisher's Version

License: [Leiden University Non-exclusive license](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/3278580>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Wiskunde stoffig?!

In het depot van Rijksmuseum Boerhaave kwam Anne Por oog in oog te staan met een reeks intrigerende wiskundemodellen van omstreeks 1900, afkomstig van het Leids Mathematisch Instituut. Sommige zijn door studenten zelf gemaakt. Waar kwam hun plotselinge populariteit vandaan?

AUTEUR ANNE POR (UNIVERSITEIT LEIDEN)

Vanaf hun planken in het depot staren ze me aan: haast ongrijpbare abstracte vormen, gemaakt van een veelheid aan materialen — karton, garen, gips, metaal en hout — en bedekt door een ragfijn laagje stof. Op een aanzienlijk deel van deze wiskundige modellen prijken etiketten met de namen van Duitse uitgeverijen en serienummers. Een ander deel — ongeveer twintig van de pakweg honderd modellen — lijkt daarentegen van eigen makelij: huisvlijt, afkomstig van het Leids Mathematisch Instituut rond 1900. Ik besluit ze onder het stof vandaan te halen en te onderzoeken welke rol ze speelden in het onderwijs aan de Leidse universiteit.

WETENSCHAP DER GEDACHTE

Het zelfgemaakte model dat het meest in het oog springt, is een zogenoemd 'ontwikkelbaar schroefoppervlak', in 1900 geschonken aan professor Van Geer door de destijds 22-jarige derdejaars wiskundestudent Antonius de Van (afbeelding 1). Op het model staat met potlood geschreven: 'Aangeboden aan Prof. dr. P. van Geer. Van zijn dankbaren leerling.' De dankbare leerling werd uiteindelijk zelf docent op het gymnasium.

Maar wat moest juist deze professor Pieter van Geer (hoogleraar wiskunde van 1867 tot 1902) met zo'n model? In zijn inaugurele rede beschreef hij de wiskunde immers



1



2



Wat hebben stoffelijke modellen voor zin bij een wetenschap die zich niets van de materiële wereld aantrekt?

als geheel onafhankelijk van de zintuiglijke waarneming. Zoals hij het verwoordt in *Ontwikkeling van den geest, het hoogste doel van de beoefening der wiskunde*: 'In een woord: is de natuurkunde de wetenschap der stof, de wiskunde is de wetenschap der gedachte'. Verderop in deze rede gooit hij er, in beeldend taalgebruik, nog een schepje bovenop:

De wiskunde stoort er zich niet aan, of op haar weg materiële hindernissen verrijzen; zij gaat over alles heen, doorkruist de stof op dezelfde wijze als het luchtledige en bouwt voort zonder zich door iets te laten weerhouden.

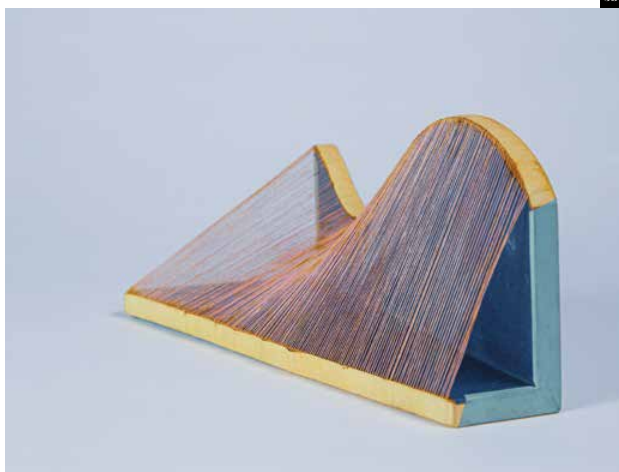
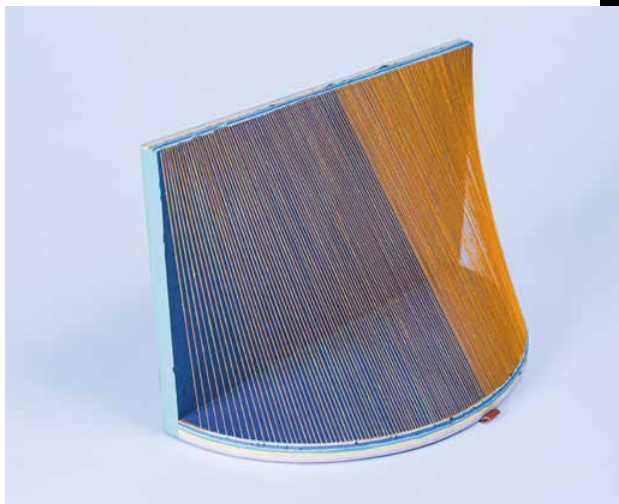
Wat hebben stoffelijke modellen voor zin bij een wetenschap die zich niets van de materiële wereld aantrekt?

Van Geer, een gewaardeerd docent met interesse in onderwijssystemen, leek van mening dat er in het onderwijs toch wel een rol voor modellen was weggelegd. Voor de jeugd was het, zoals Van Geer stelde, immers moeilijk om 'abstracte denkbeelden te volgen' en los te komen van het stoffelijke. Voor dergelijke onrijpe geesten zouden modellen een manier zijn om hogere waarheden te leren begrijpen. Het geschenk van De Van versterkt daarom het vermoeden dat Van Geer, hoewel hij de wiskunde als wetenschap der gedachte beschouwde, om pragmatische en didactische redenen wel degelijk positief stond tegenover het gebruik van stoffelijke modellen.

WERKELIJKHEID

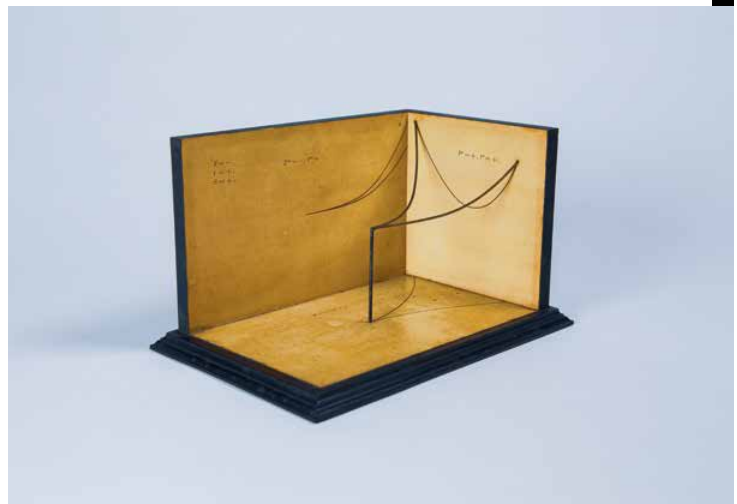
Van Geers opvolger Pieter Zeeman (niet te verwarren met zijn natuurkundige neef, de Nobelprijswinnaar van 1902) hechtte meer wiskundig-inhoudelijke betekenis aan stoffelijke modellen. In zijn inaugurele rede uit 1902, *Zuivere en toegepaste wiskunde*, bepleit hij nadrukkelijk de voordelen van het gebruik daarvan:

Even groote diensten [als tekenen] kan, in diezelfde richting worden bewezen door het vervaardigen van modellen van oppervlakken, al zijn het zelfs schematische modellen, die moeten dienen om een helder inzicht te krijgen van sommige, bij zulk een oppervlak optredende singulari-



teiten. Die modellen geven soms met één oogopslag het antwoord op vragen, die men met behulp der berekening niet dan met moeite had kunnen oplossen.

Het was niet zo vreemd dat modellen voor Zeeman een belangrijke rol speelden. Anders dan zijn voorganger Van Geer benadrukte hij namelijk het verband tussen de wiskunde en de ervaring. Wiskundige axioma's en definities zijn geïdealiseerde abstracties van de door ons waargenomen werkelijkheid, zo stelde hij. In zijn rede concludeerde Zeeman dat wiskundige objecten altijd iets met de werkelijkheid te maken hebben en nooit enkel producten van onze verbeelding kunnen zijn:



De wiskundige (...) kan onmogelijk, waar zijne grondwaarheden uit de werkelijkheid voortkomen, geheel het terrein dier werkelijkheid verlaten.

Met betrekking tot het onderwijs van toegepaste wiskunde pleitte Zeeman voor de invoering van wiskundige seminars zoals de wiskundige Felix Klein die in Göttingen organiseerde. Deelnemende studenten bestudeerden er ieder een bepaald wiskundig oppervlak, waarvan ze als onderdeel van hun opdracht ook een model ontwierpen. Deze modellen werden in sommige gevallen zelfs door uitgeverijen op de markt gebracht en verkocht, aan bijvoorbeeld de Leidse universiteit (afbeelding 2). Zo ontstond een curieus samengaan van academisch wiskundeonderwijs en commercie.

Zeeman vertelde dat dergelijke seminars op bijna elke Pruisische universiteit gegeven werden, maar tot zijn spijt nog helemaal niet in Nederland bestonden. Hij achtte het voor studenten van groot belang om 'voortbrengend' bezig te zijn. Door enkel 'opnemend' werkzaam te zijn ontstond volgens hem een gevoel van vermoeidheid: 'De productieve werkzaamheid werkt verfrisschend en kweekt zelfvertrouwen aan.' Hoewel direct bewijs ontbreekt, lijkt het waarschijnlijk dat Zeeman de daad bij het woord heeft gevoegd en dat ten minste een deel van de zelfgemaakte modellen uit de collectie van Rijksmuseum Boerhaave tijdens

1 HUISVLIJT

Het zelfgemaakte model van student Antonius de Van. (Bron: Rijksmuseum Boerhaave, inv. nr. V34642)

2 GIPSEN WISKUNDE

Een voorbeeld uit een serie gipsen modellen van derde orde ruimtekrommen op tweede orde elliptische cilinders, ontworpen door de wiskundestudent E. Lange onder leiding van Felix Klein. (Uitgegeven door L. Brill, Darmstadt; bron: Rijksmuseum Boerhaave, inv. nr. V34695)

3a 3b LEIDSE SERIE

Veertien van de kennelijk zelfgemaakte modellen zijn gemaakt van hetzelfde soort karton en draad. Uit de nummering op de handgeschreven labels blijkt dat ze deel uitmaakten van een serie. (Bron: Rijksmuseum Boerhaave, inv. nrs. V34681 (boven) en V34668 (onder))

4 FUNCTIONELE SCHADUW

Acht modellen uit de museumcollectie zijn onderdeel van een serie, ontworpen door de Duitse wiskundige Christian Wiener. Ze verbeeldden verschillende ruimtekrommen door middel van metalen draden. Getekende schaduwen maken de singulariteiten zichtbaar die ontstaan bij projectie van de betreffende ruimtekromme. Zeeman zelf promoveerde in 1878 op ruimtekrommen van de derde orde. (Uitgegeven door M. Schilling, Leipzig; bron: Rijksmuseum Boerhaave, inv. nr. V34660)

5a



onderwijs van Zeeman is gemaakt. De meeste hiervan zijn modellen van regelvlakken: vlakken die ontstaan als een rechte lijn door een ruimte beweegt (afbeelding 3).

CONTRA-INTUÏTIEF

J.C. Kluyver (hoogleraar van 1892 tot 1930) is, ten slotte, de derde Leidse hoogleraar die te koppelen is aan de modellen. Ook hij benadrukte in zijn inaugurele rede, *Beschouwingen over de nieuwere algebra*, het verband van de wiskunde met de realiteit. Hij zegt dat niet-wiskundigen wiskundige vormen vaak beschouwen als volledig losstaand van de realiteit — als enkel toebehorend aan de fantasie. Dat de wiskunde alleen in de gedachte zou bestaan betekende voor sommige wiskundigen juist dat wiskundige waarheden de enige werkelijke waarheden zouden zijn, namelijk waarheden zonder enige invloed van buiten. Kluyver was het met beide zienswijzen — fantasie of werkelijke waarheid — oneens. In navolging van John Stuart Mill stelde hij dat axioma's generalisaties van onze ervaring zijn, waarmee hij zich naast Zeeman schaarde.

Kluyver richtte zich op relatief nieuwe, weinig intuïtieve vormen van wiskunde. Hij legde uit dat ook bij deze wiskunde het gebied der werkelijkheid niet verlaten werd: 'Het komt mij voor, dat hoever wiskundige beschouwingen ook worden voortgezet, men steeds met dezelfde benadering als in den aanvang in het wezen der zaak met fenomenen der werkelijkheid te doen heeft.' Hij voegde toe:

5b



*In het seminar van Felix Klein gingen
academisch wiskundeonderwijs en
commercie op curieuze wijze samen*

Onderwijsvernieuwing

Ook de collectie van de Rijksuniversiteit Groningen bevat wiskundemodellen van rond 1900. Een aanzienlijk deel daarvan is indertijd aangekocht door de professor meetkunde Pieter Hendrik Schoute. Een ander deel van de Groningse modellen is ontworpen door de Ierse wiskundige Alicia Boole Stott, met wie Schoute ruim twintig jaar samenwerkte. Boole Stott had van haar moeder en onderwijsvernieuwer Mary Everest Boole een zeer op aanschouwing gerichte opvoeding gekregen en had geleerd de vierde dimensie te 'zien'.

In die zienswijze wordt men versterkt door op te merken, dat zoo dikwijls in de hogere wiskunde nieuwe denkbeelden hun ontstaan danken aan de waarneming van alledaagsche verschijnselen. Ook daaruit blijkt haar innig verband met de realiteit.

Alhoewel Kluyver intuïtie als onmisbaar zag 'om de wiskundige gedachtenwereld in aanraking te doen blijven met de werkelijkheid', waarschuwt hij ook voor haar verraderlijke kant. Een te groot vertrouwen op de intuïtie leidt er namelijk toe dat logisch mogelijke objecten in de wiskunde vanwege hun vreemde voorkomen niet worden erkend. Het (letterlijk) verbeelden van dergelijke 'pathologische wiskunde', zoals 'integreerbare functies met de vreemdsoortigste ondoorlopendheden', helpt in te zien 'hoezeer het logisch mogelijke in de wiskunde afwijken kan, van wat men vroeger vol goed vertrouwen op de aanschouwing als logisch noodzakelijk dacht'. Met gevoel voor dramatisch taalgebruik beschrijft Kluyver deze op het eerste gezicht onlogische wiskundige objecten als 'monsters' in een 'museum' die studenten in de armen van 'logica, de ware leidsvrouw' moesten drijven. Veel van deze 'monsters' vielen in het geheel niet te verbeelden, maar andere konden wel degelijk vorm krijgen als stoffelijke modellen, als waarschuwing tegen het blindvaren op de intuïtie. In 1893, een jaar na zijn aanstelling, kende de minister van Binnenlandse Zaken Kluyver

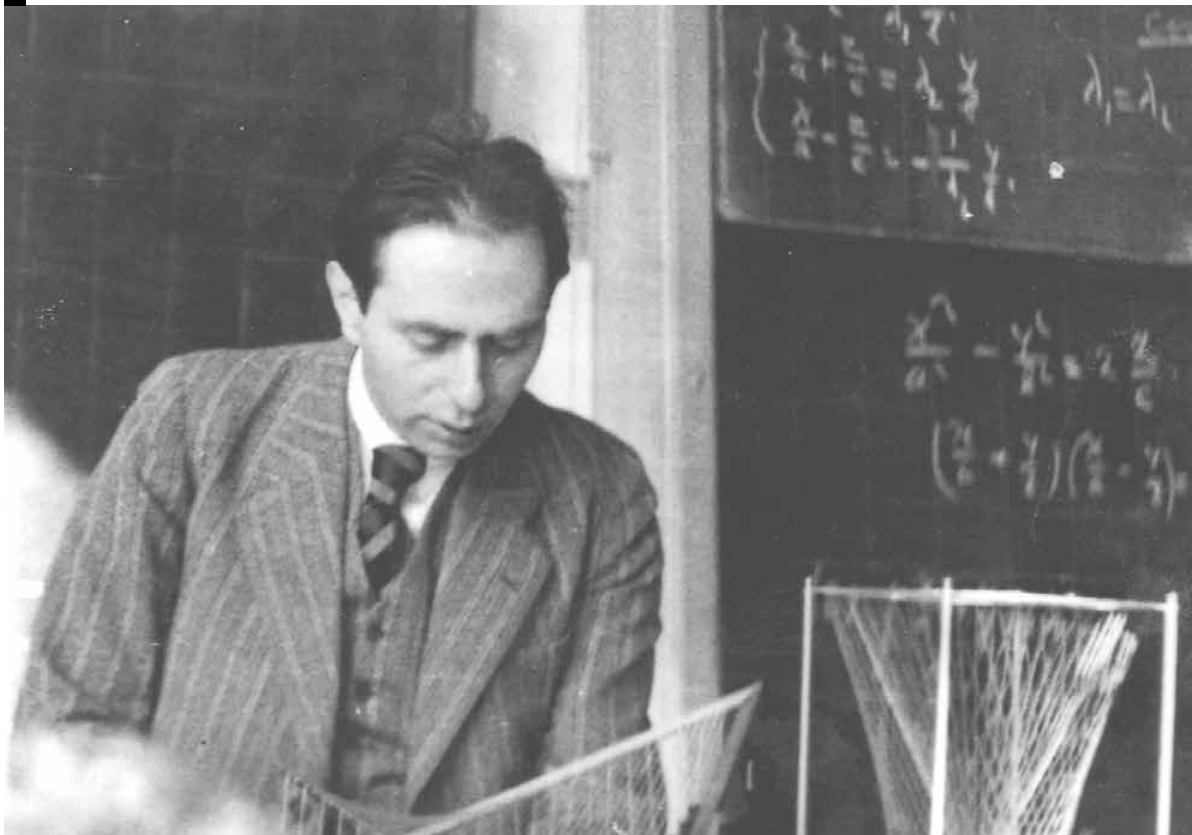
50 gulden toe voor de aanschaf van wiskundemodellen. Het is een van de weinige keren dat de wiskundemodellen in het archief van de faculteit wis- en natuurkunde voorkomen. Wellicht behoren de exemplaren van afbeelding 5 daartoe. Kluyvers opmerking over 'integreerbare functies met de vreemdsoortigste ondoorlopendheden' duidt erop dat in elk geval de in de collectie aanwezige modellen over functietheorie door hem zijn aangekocht.

Kortom, de verschillende Leidse hoogleraren gebruikten de wiskundemodellen voor diverse doeleinden. Waar fysieke modellen voor Van Geer voornamelijk didactisch nut hadden, benoemde Zeeman ook hun wetenschappelijke functie. Kluyver voerde een verrassend derde doel aan. Door te laten zien hoe misleidend aanschouwing en intuïtie konden zijn, hoopte hij juist het streven naar logische strengheid te bevorderen. Maar waar kwam alle belangstelling voor modellen eigenlijk vandaan?

AANSCHOUWELIJK ONDERWIJS IN OPMARS

Dat het gebruik van modellen vanaf eind negentiende eeuw opgang maakte in de Leidse wiskunde staat niet op zichzelf. Uitgeverij L. Brill bracht alleen al tussen 1877 en 1884 bijna honderd wiskundemodellen op de markt (al dan niet bedacht door Duitse wiskundestudenten). Andere uitgeverijen volgden. Zoals Irene Polo-Blanco in haar proefschrift in kaart heeft gebracht, herbergde een aanzienlijk deel van de Nederlandse universiteiten dergelijke

5a 5b ONEINDIGHEIDSPUNTEN Deze gipsen modellen zijn vermoedelijk aangeschaft door Kluyver. Ze laten zien hoe zogenaemde logaritmische oneindigheidspunten, die weinig intuïtief zijn, kunnen worden uitgebeeld. De modellen zijn ontworpen aan de Polytechnische School in München, door de wiskundestudent J. Kleiber en assistent H. Burkhardt, en onder leiding van professor Walther von Dyck (die zelf bij Felix Klein had gestudeerd). (Uitgegeven door L. Brill, Darmstadt; bron: Rijksmuseum Boerhaave, inv. nr. V34655 (boven) en inv. nr. 34678 (onder).)



6 IN ACTIE

Een wiskundemodel in gebruik tijdens een college van Van Dantzig in Delft in 1938. (Bron: collectie Gerard Alberts)

aangekochte wiskundemodellen (zie het kader op pagina 65). Interessant is dat er in deze tijd een groeiende belangstelling was voor de ideeën van de onderwijshervormer Friedrich Fröbel (bekend van de term 'fröbelen'). Hij hechtte bijvoorbeeld veel waarde aan het spelen met simpele driedimensionale lichamen (bol, kubus en cilinder). Terwijl de wiskundemodellen ingang vonden bij het universitaire onderwijs, omarmden opvallend genoeg in korte tijd twee lagere scholen en een kweekschool in Leiden het fröbelonderwijs. Het fröbelen, al dan niet aan wiskundige vormen, lijkt in bredere zin verband te houden met de groeiende populariteit van onderwijs waarbij studenten en scholieren

zelf de handen uit de mouwen staken. Het beste voorbeeld daarvan zijn de hogere burgerscholen (opgericht vanaf 1863) met hun aandacht voor praktisch onderwijs in de natuurwetenschappen. Aan de universiteiten kregen medische en natuurwetenschappelijke studenten vanaf 1850 steeds vaker een microscoop of chemische instrumenten in hun handen geduwd. Het zicht- en tastbaar maken van meer abstracte kennis werd van didactisch belang geacht. Stoffelijke modellen als kinderspel? Voor Leidse professoren hadden ze ruim een eeuw geleden didactisch, wetenschappelijk én waarschuwend nut. ■

Fotografie: Marc Moolenaar

Lees (en zie) meer

I. Polo-Blanco, *Theory and History of Geometric Models* (proefschrift Rijksuniversiteit Groningen 2007). Zie ook: math.rug.nl/models.
D. Ludwig, C. Weber & D. Zauzig (red.), *Das materielle Modell. Objektgeschichten aus der wissenschaftlichen Praxis* (Paderborn 2014).
Zie ook: Göttinger Sammlung mathematischer Modelle und Instrumente, modellsammlung.uni-goettingen.de.