Scaling limits in algebra, geometry, and probability

Arzhakova, E.

Samenvatting

Deze scriptie omschrijft het limietgedrag van dynamische systemen zoals deze voorkomen in verscheidene wiskundige deelgebieden, zoals algebra, meetkunde en kansrekening.

Objecten in de wereld om ons heen bestaan uit een gegeven aantal deeltjes die onderling interageren. Dit wordt op een natuurlijke manier omschreven als een dynamisch systeem. Soms is het aantal deeltjes zodanig dat het redelijk is om aan te nemen dat het er oneindig veel zijn. Zulke oneindige systemen kunnen worden omschreven door ze te benaderen met een reeks dynamische systemen met een eindig veel en toenemend aantal deeltjes. Het is niet noodzakelijk makkelijk om de eindige systemen te omschrijven. Een bekend voorbeeld is het n-lichamen probleem, dat voor $n > 2$ geen gesloten vorm oplossingen heeft. Maar in sommige situaties is het mogelijk om het zogenaamde limietgedrag, dat wil zeggen, eigenschappen van het oneindige systeem te bepalen met behulp van deze reeks van eindige dynamische systemen.

In hoofdstukken twee en drie onderzoeken we het limietgedrag van de coefficienten van gedecimeerde Laurent polynomen. Het is bekend dat de schaallimiet bestaat voor de karakteristieke polynomen van Dimer modelen. Het bewijs van het bestaan van deze limiet hangt af van de eigenschappen van het Dimer model. Daarom kunnen ze niet zondermeer gegeneraliseerd worden naar andere systemen. In hoofdstuk twee bespreken we het bewijs van het bestaan van een *convexe romp* van de geschaalde coefficienten van de gedecimeerde Laurent polynoom. Analoog aan de schaallimiet van het Dimer model wordt deze convexe romp gegeven door de Legendre transformatie van de Ronkin functie van deze polynoom. Hoofdstuk drie herhaalt dit resultaat met een alternatief bewijs en leidt de implicaties af voor gedecimeerde voornaamste algebraische acties.

In hoofdstuk vier bestuderen we het determinante puntproces horend bij uniform opspannende bossen op $\mathbb{Z}^d$-periodieke grafen. Het voornaamste resultaat in het hoofdstuk is een expliciete uitdrukking van de kansmaat geassocieerd met het uniforme opspannende bos DPP op $\mathbb{Z}^d$-periodieke grafen. Het bestaan van een dergelijke maat is aangetoond in [12] als de limiet van een reeks van maten op eindige grafen. Het is opmerkelijk dat de limietmaat hangt af van de randvoorwaarden en deze maat is daardoor niet noodzakelijk uniek. De grafen die worden bestudeerd in dit hoofdstuk daarentegen hebben wel een unieke limietmaat waarvoor een expliciete uitdrukking is afgeleid, waarbij slechts de fundamentele domeinen van de $\mathbb{Z}^d$-periodieke graaf zijn gebruikt. Het is een open vraag of dezelfde aanpak gebruikt kan worden voor de Cayleygrafen van groepen anders dan $\mathbb{Z}^d$, zoals bijvoorbeeld de Heisenberggroep.

In hoofdstuk vijf bestuderen we de snelheid van convergentie in de Centrale Limiet Stelling voor ergodische torische automorfismen. De resultaten zijn beschikbaar voor een subklasse van ergodische torische automorfismen, namelijk de hyperbolische torische automorfismen. Spectrumeigenschappen van niet-hyperbolische torische automorfismen zijn zwakker dan voor de hyperbolische torische automorfismen. Daardoor kunnen de bekende methodes niet worden toegepast voor de studie van de snelheid van convergentie van algemene ergodische torische automorfismen. In hoofdstuk vijf bewijzen we een centrale limietstelling voor Ergdoische torische automorfismen met behulp van de Steinmethode, zoals in [49]. De twee voordelen van deze methode zijn als volgt: In de eerste plaats geeft het op natuurlijke wijze een grens voor de snelheid van convergentie. Als tweede gebruikt het de mixeigenschappen van automorfismen (ergodische torische automorfismen zijn exponentieel mixend voor Hölder observabelen) in plaats van de spectrumeigenschappen.

Hoofdstuk zes focust op het meetkundige probleem van de studie van isoperiodieke foliaties in de Torelliruimte van Riemannoppervlakken. Voor holomorfe differentialen zijn veel eigenschappen van de isoperiodieke foliaties bekend, zoals bijvoorbeeld ergodiciteit en of de vezels verbonden zijn. De studie van meromorfe differentialen daarentegen is veel gefragmenteerder. De verbondenheid is alleen bekend in het geval van twee polen met een willekeurige genus. In hoofdstuk zes bewijzen we dat elke vezel van de reële isoperiodieke foliaties is verbonden (onder milde voorwaarden) in de Torelliruimte van Riemannoppervlakken van genus één met drie simpele polen. Dit geval is informatief om twee redenen: In de eerste plaats is het moeilijker dan een geval met meer polen, omdat de degeneratie techniek niet kan worden toegepast. De tweede reden is dat het geval van genus één met drie polen kan dienen als een basis voor de inductie van een algemenere uitspraak.