



Universiteit  
Leiden  
The Netherlands

## Statistical physics and information theory for systems with local constraints

Zhang, Q.

### Citation

Zhang, Q. (2021, December 1). *Statistical physics and information theory for systems with local constraints*. *Casimir PhD Series*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/3244220>

Version: Publisher's Version

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/3244220>

**Note:** To cite this publication please use the final published version (if applicable).

# Samenvatting

Statistische fysica houdt zich bezig met de beschrijving van systemen die zijn opgebouwd uit heel veel microscopische bestanddelen die met elkaar wisselwerken. Zij ontwikkelt methoden om de macroscopische eigenschappen te karakteriseren die gevonden worden men het aantal bestanddelen naar het oneindige laat gaan, de zogenaamde thermodynamische limiet. De introductie van het z.g. statistisch ensemble, een verzameling van (niet-waarneembare) microscopische configuraties van het systeem, die elk een bepaalde waarschijnlijkheid krijgen toegewezen en die wordt berekend op basis van bepaalde (waarneembare) macroscopische randvoorwaarden, spelt hierbij een grote rol. In de natuurkunde zijn de randvoorwaarden doorgaans grootheden die op globale schaal behouden zijn, zoals de totale energie en het totale aantal deeltjes. Er zijn verschillende manieren om deze randvoorwaarden op te leggen, elk leidend tot een ander ensemble. De twee belangrijkste zijn het microcanonieke en het canonieke ensemble. Bij het microcanonieke ensemble wordt de randvoorwaarde op een harde manier afgedwongen (namelijk elke configuratie in het ensemble moet aan de randvoorwaarde voldoen, zoals b.v. in een geïsoleerd systeem met een vaste totale energie). Bij het canonieke ensemble daarentegen, wordt, de randvoorwaarde op een zachte manier afgedwongen (aan de randvoorwaarde wordt gemiddeld voldaan, zoals in een systeem met fluctuerende energie die in contact staat met een warmtebad met vaste temperatuur). In het algemeen wordt aangenomen dat deze twee ensembles in de thermodynamische limiet asymptotisch identiek worden, een begrip dat bekend staat als ensemble equivalentie. Ensemble equivalentie houdt in dat, naarmate het systeem groter wordt, het niet uitmaakt welke van de twee beschrijvingen wordt genomen; in het bijzonder, de canonieke en microcanonieke entropieën per deeltje worden hetzelfde.

Er zijn echter aanwijzingen dat ensemble equivalentie onder bepaalde omstandigheden verdwijnt, bijvoorbeeld in de buurt van faseovergangen. In bepaalde fasen, gebieden in de parameter ruimte, is geen ensemble equivalentie (de canonieke en microcanonieke entropieën per deeltje zijn verschillend) en in andere fasen is het wel. Onlangs heeft men zich gerealiseerd dat ensemble equivalentie ook afwezig kan zijn als het systeem lokale randvoorwaarden heeft, d.w.z. randvoorwaarden die aan elk van de fundamentele eenheden zijn verbonden, of ten minste met een eindige fractie ervan. Het aantal randvoorwaarden schaalt dan met de grootte van het systeem. Netwerken met een gegeven aantal verbindingen (graad) voor elk knooppunt afzonderlijk zijn hiervan een voorbeeld. In dat geval blijkt dat ensemble equivalentie nergens in de parameter ruimte van toepassing is, omdat zelfs het meest eenvoudige model niet eens een faseovergang vertoont.

In dit proefschrift bestuderen wij nieuwe aspecten van de afwezigheid van ensemble equivalentie bij lokale randvoorwaarden en identificeren wij de impact daarvan op bepaalde sleutelbegrippen in de informatietheorie. In Hoofdstuk 1 leggen wij de basis door de belangrijkste begrippen te introduceren en een informele analogie vast

te stellen tussen ensembles in de statistische fysica en de “typische set” in de informatietheorie. Systemen met gegeven macroscopische eigenschappen in de statistische fysica krijgen hierdoor een analogon in zo’n typische set. Laatstgenoemden zijn van groot belang voor zaken als de maximale compressibiliteit van data en de minimale snelheid van informatieoverdracht om verliesvrije communicatie te behouden.

In Hoofdstuk 2 introduceren wij het eerste model waarin wij ensemble niet-equivalentie bestuderen, met zowel een extensief aantal lokale randvoorwaarden als een faseovergang. Het model is het eerste waarbij ensemble niet-equivalentie wordt bestudeerd op gewogen netwerken, d.w.z. netwerken waar lijnen (verbindingen) verschillende gewichten kunnen dragen. Door de randvoorwaarden van elk knooppunt van het netwerk afhankelijk te maken van een globale, op een temperatuur lijkende parameter, tonen wij aan dat het mogelijk is om een vorm van Bose-Einstein condensatie tot stand te brengen waarbij een eindige fractie van de totale lijngewichten zich concentreert tussen een eindig aantal knooppunten. Ook laten wij zien dat het traditionele criterium voor ensemble equivalentie, n.l. het verdwijnen van de relatieve fluctuaties van de randvoorwaarden in het canonieke ensemble, in het geval van lokale randvoorwaarden niet meer van toepassing is. De relatieve fluctuaties zijn karakteristiek voor het begin van de condensatieovergang, maar niet voor het verbreken van ensemble equivalentie. Dit is echt nieuw, en laat zien dat het nieuwe mechanisme op basis van lokale randvoorwaarden vrij subtiel is.

In Hoofdstuk 3 breiden wij het raamwerk van systemen met lokale randvoorwaarden aanzienlijk uit, van het geval van netwerken met randvoorwaarden bij elk knooppunt tot dat van generieke systemen die kunnen worden beschreven door rechthoekige matrices met randvoorwaarden die gelden voor de rij- en/of kolomsommen. Dergelijke matrices kunnen een breed scala aan systemen vertegenwoordigen met ruimtelijke heterogeniteit en/of temporele niet-stationariteit. In deze meer algemene setting, blijkt ensemble niet-equivalentie op een nog sterkere manier op te kunnen treden, waarbij het verschil tussen canonieke en microcanonieke entropieën van dezelfde orde is als de entropieën zelf. Deze vorm van ensemble niet-equivalentie is even sterk als die wordt aangetroffen bij de aanwezigheid van faseovergangen, maar behoudt tegelijkertijd de eigenschap dat zij onbeperkt is in de parameter ruimte, zoals het geval is bij de andere bekende systemen met lokale, randvoorwaarden. Het is dan ook de meest robuuste vorm van niet-equivalentie die tot dusver is gevonden. Voor een groot aantal specifieke instellingen hebben wij expliciet de wiskundige grootheden berekend die de twee ensembles van elkaar onderscheiden.

In Hoofdstuk 4 maak ik een grote sprong van de statistische natuurkunde naar de informatietheorie om de gevolgen van ensemble-ongelijkwaardigheid te onderzoeken voor de compressie van moderne grote gegevensstructuren zoals grote netwerken of lange multivariate tijdreeksen. Eerst stellen wij een rigoureuze analogie vast tussen “typische sets”, d.w.z. het collectief meest waarschijnlijke uitkomsten van een informatiebron, en microcanonieke ensembles als deelverzamelingen van de canonieke configuraties van een fysisch systeem. Vervolgens tonen wij aan dat, wanneer ensemble-equivalentie geldt, de analogie in feite een identiteit is: de microcanonieke configuraties vallen samen met de “typische sets” van het canonieke ensemble, wat in-

houdt dat er geen verschil is tussen bronnen die onderworpen zijn aan harde en zachte randvoorwaarden. Wanneer de ensemble-equivalentie echter wegvalt, is de “typische set” van het canonieke ensemble onherleidbaar tot het microcanonieke ensemble. In dit geval laten wij zien dat, voor harde randvoorwaarden, de standaard informatietheoretische resultaten met behulp van de methoden van hoofdstuk 3 moeten worden veralgemeniseerd. Wij hebben in het bijzonder de traditionele informatietheoretische grenzen voor gegevenscompressie op basis van Shannon-entropie herzien. Wij zien dat microcanonieke bronnen minder opslagruimte vergen maar meer rekenkracht, terwijl het omgekeerde geldt voor canonieke bronnen. Dit wijst op een nieuwe wisselwerking en afweging tussen geheugen en rekenkracht.

Ten slotte bestuderen wij in Hoofdstuk 5 een nog algemenere setting. Wij kijken naar systemen met meerdere informatiebronnen, zoals die welke multivariate tijdreeksen genereren (vaak gezien in de financiële wereld of in de neurowetenschappen) waar randvoorwaarden zowel de outputs van verschillende bronnen tegelijkertijd kunnen koppelen (ruimtelijke randvoorwaarden) als de outputs van dezelfde bron op verschillende tijdstippen (temporele randvoorwaarden). Wij vinden dat temporele randvoorwaarden nooit ensemble equivalentie doorbreken, terwijl ruimtelijke randvoorwaarden wel doen als het aantal bronnen eindig is. Nogmaals, terwijl voor canonieke bronnen de standaard Shannon theorie geldig blijft, moeten voor microcanonieke bronnen verschillende informatietheoretische grootheden worden gecorrigeerd met behulp van de berekeningen van Hoofdstuk 3. Bovendien vinden wij dat de (per output) genormaliseerde totale correlatie tussen alle bronnen die onderhevig zijn aan harde randvoorwaarden samenvalt met het (per output) genormaliseerde verschil tussen canonieke en microcanonieke entropieën. Dit vereist, uitsluitend de kennis van de covariantiematrix tussen de canonieke randvoorwaarden en kan daarom expliciet worden berekend. Als ruimtelijke randvoorwaarden worden opgeheven, wordt ensemble equivalentie hersteld en verdwijnt de genormaliseerde totale correlatie, dus de microcanonieke outputs wordt asymptotisch wederzijds onafhankelijk, net als de canonieke outputs.

