



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Measures and matching for number systems

Maggioni, M.

Citation

Maggioni, M. (2021, March 4). *Measures and matching for number systems*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/3147169>

Version: Publisher's Version

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/3147169>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Cover Page



Universiteit Leiden



The handle <https://hdl.handle.net/1887/3147169> holds various files of this Leiden University dissertation.

Author: Maggioni, M.

Title: Measures and matching for number systems

Issue Date: 2021-03-04

Samenvatting

Getalsontwikkelingen zijn een manier om getallen te representeren met specifieke symbolen en consistente regels. Klassieke voorbeelden zijn β -expansies, binaire representaties en kettingbreuken. De algoritmes die de symbolen combineren om getallen te coderen worden verkregen door het herhaald itereren van bepaalde intervalafbeeldingen die getalsystemen worden genoemd. Het voordeel van deze dynamische beschrijving is dat al het gereedschap uit de ergodische theorie beschikbaar is. Dit betreft in het bijzonder het begrip van invariante maten μ die absoluut continu zijn met betrekking tot de Lebesgue maat λ . Om precies te zijn, een maat μ is T -invariant voor een intervalafbeelding T en absoluut continu met betrekking tot λ als

$$\mu(B) = \int_B f d\lambda = \mu(T^{-1}(B))$$

geldt voor iedere Borel deelverzameling B van $\mathbb{R}$, waarbij f een integreerbare functie is die de dichtheid wordt genoemd. Voor getalsystemen zoals bijvoorbeeld β -transformaties, de standaard Lüroth afbeelding en de Gauss afbeelding hebben expliciete uitdrukkingen voor invariante maten laten zien dat ze nuttig zijn voor het bepalen van eigenschappen van getalsontwikkelingen zoals symboolfrequentie, entropie en de kwaliteit van de benaderingen. Maar hoewel er verschillende resultaten zijn over het bestaan van zulke maten, is het vinden van een expliciete formule nog steeds een ingewikkeld probleem.

In dit proefschrift worden expliciete uitdrukkingen gegeven voor de dichtheidsfuncties van absoluut continue invariante maten voor algemene families van intervalafbeeldingen, waaronder stochastische afbeeldingen en transformaties met een oneindige maat, die niet noodzakelijk getalsystemen zijn. In de stochastische setting is niet één maar een verzameling afbeeldingen $\{T_j : I \rightarrow I\}_{j \in \Omega}$ beschikbaar en wordt op ieder tijdstip één van deze afbeeldingen toegepast volgens een bepaalde kansverdeling die wordt gespecificeerd door een positieve kansvector $\mathbf{p} = (p_j)_{j \in \Omega}$. Zo'n stochastische afbeelding neemt onder bepaalde voorwaarden een stationaire maat $\mu_{\mathbf{p}}$ met dichtheid $f_{\mathbf{p}}$ aan, dat wil zeggen dat

$$\mu_{\mathbf{p}}(B) = \int_B f_{\mathbf{p}} d\lambda = \sum_{j \in \Omega} p_j \mu_{\mathbf{p}}(T_j^{-1}B)$$

geldt voor iedere Borel deelverzameling B van $\mathbb{R}$. In de oneindige configuratie is de maat op de toestandsruimte oneindig en is het gereedschap uit de kansrekening niet meer beschikbaar. In dit geval vinden we expliciete uitdrukkingen voor de dichtheidsfuncties met andere technieken waarbij de Perron-Frobenius operator, natuurlijke

uitbreidingen en het dynamische verschijnsel synchronisatie worden gebruikt. Synchronisatie geldt voor een stuksgewijs gladde intervalafbeelding T als voor elk kritieke punt c de banen van de linker- en rechterlimiet van c elkaar uiteindelijk tegenkomen, dat wil zeggen als

$$\lim_{x \uparrow c} T^{M_c}(x) = \lim_{x \downarrow c} T^{N_c}(x)$$

geldt voor zekere niet-negatieve gehele getallen M_c en N_c . Vervolgens passen we de resultaten toe op de dichtheidsfuncties om eigenschappen van nieuwe getalsontwikkelingen te bestuderen.

Dit proefschrift is als volgt opgebouwd. Hoofdstuk 2 introduceert een familie van stochastische intervalafbeeldingen die gegeven worden door combinaties van generaliseerde Lüroth afbeeldingen gedefinieerd op de intervallen $I_c = [c, 1]$ met $c \geq 0$. Dit stochastische systeem genereert voor bijna alle $x \in I_c$ overaftelbaar veel verschillende getalsontwikkelingen die gelijktijdig bestudeerd kunnen worden. Bovendien kan van elke irrationale $x \in I_c$ iedere mogelijke getalsontwikkeling worden afgekapt om een rationale benadering van het punt te krijgen. De kwaliteit van deze benaderingen wordt bestudeerd met de Lyapunov-exponent en de benaderingscoëfficiënten. Dit hoofdstuk suggereert dat een algoritmische procedure nodig is om voor stochastische intervalsystemen die stuksgewijs affien zijn de dichtheid van een absoluut continue invariante maat te construeren om meer informatie te krijgen over de bijbehorende getalsontwikkelingen.

Hoofdstuk 3 maakt de noodzaak van het vorige hoofdstuk duidelijk. Het bespreekt een algebraïsch algoritme met als invoer een stochastisch stuksgewijs affien systeem T dat gemiddeld genomen expandeert, en met als uitvoer een formule voor de stationaire maat. Deze uitgebreide procedure blijkt efficiënt te zijn voor specifieke klassen van transformaties, zoals de stochastische β -transformaties, Lüroth afbeeldingen en meer in het algemeen voor systemen waarin de dynamische kenmerken van synchronisatie opduiken. Dit wordt verder geanalyseerd in Hoofdstuk 5.

Hoofdstuk 4 onderzoekt de gevolgen van synchronisatie voor een oneindige klasse $\{T_\alpha\}_\alpha$ van kettingbreukafbeeldingen. Meer specifiek wordt het verschijnsel synchronisatie gebruikt om het tweedimensionale domein van de natuurlijke uitbreiding te vinden. Bovendien is voor het eerst op het gebied van transformaties met een oneindige maat bewezen dat synchronisatie geldt voor Lebesgue-bijna elke parameter α , en het verdeelt de parameterruimte in intervallen met constante synchronisatie-exponenten die synchronisatie-intervallen worden genoemd. Tenslotte relateert dit hoofdstuk deze synchronisatie-intervallen aan de corresponderende verzamelingen van Nakada's α -kettingbreukafbeeldingen.

Hoofdstuk 5 breidt het begrip synchronisatie, tot dusver alleen bekend voor deterministische transformaties, uit tot het zogeheten begrip stochastische synchronisatie voor stochastische intervalafbeeldingen. Stochastische synchronisatie wordt vervolgens bestudeerd voor een verscheidenheid aan families van stochastische dynamische

systemen, waaronder de gegeneraliseerde β -transformaties en kettingbreukafbeeldingen. Bovendien impliceert stochastische synchronisatie voor een grote klasse van stuksgewijs affine stochastische intervalsystemen dat iedere dichtheidsfunctie van een stationaire maat stuksgewijs constant is. Tenslotte introduceert dit hoofdstuk een familie van stochastische afbeeldingen die ontwikkelingen in basis 2 genereren waarbij de symbolen worden gekozen uit de verzameling $\{-1, 0, 1\}$. De eigenschap van stochastische synchronisatie en de gevolgen daarvan voor de structuur van de dichtheidsfunctie worden vervolgens toegepast om de frequentie van het symbool 0 in zulke ontwikkelingen te bestuderen.