



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Topologies and convergence structures on vector lattices of operators

Deng, Y.

Citation

Deng, Y. (2021, February 2). *Topologies and convergence structures on vector lattices of operators*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/3135024>

Version: Publisher's Version

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/3135024>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Cover Page



Universiteit Leiden



The handle <https://hdl.handle.net/1887/3135024> holds various files of this Leiden University dissertation.

Author: Deng, Y.

Title: Topologies and convergence structures on vector lattices of operators

Issue Date: 2021-02-02

Samenvatting

Dit proefschrift bestaat uit drie artikelen rondom het gemeenschappelijke thema van Hausdorff uo -Lebesgue topologieën en convergentiestructuren op vectorroosters en op vectorroosters en vectorroosteralgebra's van ordebegrensde operatoren. De oorsprong ervan is gelegen in de vraag naar mogelijke analoga van von Neumanns bicommutantstelling in de context van Banachroosters en vectorroosters. Afgezien van hun waarde als zodanig wordt van dergelijke analoga verwacht dat ze relevant zijn voor het onderzoek naar vectorroosteralgebra's en Banachroosteralgebra's van ordebegrensde operatoren, evenals voor representatietheorie in vectorroosters en Banachroosters.

Bij het overwegen van een mogelijke bicommutantstelling voor vectorroosters ontbreekt er in die context een belangrijk ingrediënt, namelijk de zwakke (of sterke) operatortopologie die in von Neumanns stelling voorkomt. Gelukkig zijn er wel natuurlijke kandidaten om de rol daarvan over te nemen. De eerste hiervan is een mogelijke Hausdorff uo -Lebesgue topologie op een vectorroosteralgebra van operatoren. Dergelijke topologieën op vectorroosters hebben de afgelopen jaren sterk in de belangstelling gestaan en ze lijken een bijzondere plaats in te nemen binnen de mogelijke lokaal solide topologieën. Buiten dit zijn er verschillende natuurlijke convergentiestructuren op vectorroosters van ordebegrensde operatoren die in overweging genomen kunnen worden. Deze treden in paren op, bestaande uit een uniforme en een sterke versie. Bij wijze van voorbeeld: in de algemene theorie wordt de definitie van ordeconvergentie van een net in een vectorrooster gegeven, die dus ook van toepassing is op een net in een vectorrooster van ordebegrensde operatoren. Voor een net van operatoren op een vectorrooster kan men echter ook verlangen dat het net puntsgewijs ordeconvergent is voor ieder element van het onderliggende vectorrooster. Op die manier kennen we zowel een uniforme als een sterke ordeconvergentiestructuur voor een vectorrooster van ordebegrensde operatoren. Net zo zijn er een uniforme en een sterke onbegrensde ordeconvergentiestructuur, evenals een uniforme convergentiestructuur met betrekking tot een eventuele Hausdorff uo -Lebesgue topologie (die de topologische structuur is zoals hierboven al genoemd) en een sterke convergentiestructuur met betrekking tot een dergelijke topologie op het onderliggende vectorrooster. Op die manier worden zes convergentiestructuren verkregen. Voor ieder van deze convergentiestructuren kan men spreken van de bijbehorende aankleving van een verzameling van ordebegrensde operatoren. Deze aanklevingen (waarvan één een topologische afsluiting is) zijn ieder natuurlijke kandidaten om de rol van de afsluiting in de zwakke (of sterke) operatortopologie in von Neumann's stelling over te nemen.

Bij het nadenken over deze convergentiestructuren in de context van een mogelijke bicommutantstelling wordt al heel snel de behoefte gevoeld aan 'basisresultaten om mee te

werken'. Bij wijze van voorbeeld: is de aankleving van een vectorroosterdeelalgebra van de ordebegrensde operatoren met betrekking tot de sterke onbegrensde ordeconvergentiestructuur weer een vectorroosterdeelalgebra? Naar blijkt is dat altijd het geval wanneer deze bevat is in de orthomorfismen, maar niet altijd wanneer deze bevat is in de ordecontinue operatoren. De vraag is een natuurlijke en het antwoord is gemakkelijk te formuleren, maar het aantonen van de juistheid van dit antwoord (inclusief de 'optimaliteit' ervan als een belangrijke component) is een niet-triviale aangelegenheid. Er zijn vele van dergelijke fundamentele, maar vaak niet-triviale, vragen die beantwoord moeten worden voordat het onderzoek kan beginnen aan meer geavanceerde aspecten van de theorie, zoals een bicommutantstelling. Dergelijke vragen zijn nog niet serieus onderzocht. In dit proefschrift wordt daar op een systematische manier mee begonnen.

Het eerste wiskundige gedeelte van het proefschrift, Hoofdstuk 2, is nog gericht op de algemene theorie van Hausdorff uo -Lebesgue topologieën op vectorroosters. Uitgaande van een Hausdorff o -Lebesgue topologie op een ordedicht ideaal wordt een Hausdorff uo -Lebesgue topologie op het vectorrooster als geheel geconstrueerd. Dit resulteert in een omhoog-omlaag procedure waarmee reguliere vectordeelroosters van een dergelijke topologie voorzien kunnen worden. Deze methode gaat nog een stap verder dan een al eerder bekende uniforme constructie van dergelijke topologieën. Er wordt ook aangetoond hoe klassieke relaties tussen convergentie in maat en convergentie bijna overal speciale gevallen zijn van meer algemene verbanden tussen convergentie in een Hausdorff uo -Lebesgue topologie en onbegrensde ordeconvergentie.

In Hoofdstuk 3 worden Hausdorff uo -Lebesgue topologieën op vectorroosters van onbegrensde operatoren geconstrueerd uitgaande van Hausdorff o -Lebesgue topologieën op de onderliggende vectorroosters. De zes convergentiestructuren die hierboven genoemd zijn worden in dit hoofdstuk geïntroduceerd en hun relaties worden onderzocht op het niveau van vectorroosters van ordebegrensde operatoren. Er wordt speciale aandacht besteed aan de orthomorfismen, waar implicaties tussen deze convergenties gelden die niet in het algemeen waar zijn.

In Hoofdstuk 4 worden, nadat het onderzoek naar de zesendertig mogelijke implicaties tussen de zes convergentiestructuren voor vectorroosters van ordebegrensde operatoren voltooid is, deze convergentiestructuren vervolgens beschouwd in de context van vectorrooster-algebra's van ordebegrensde operatoren. De continuïteit van de links- en rechtsvermenigvuldiging met betrekking tot deze convergentiestructuren wordt onderzocht, evenals de gelijktijdige continuïteit van de vermenigvuldiging. Resultaten over aanklevingen van vectorroosterdeelalgebra's die weer vectorroosterdeelalgebra's zijn worden als onmiddellijke gevolgen verkregen. Met één uitzondering wordt ook aangetoond dat deze resultaten 'optimaal' zijn. Verder worden ook resultaten gegeven met betrekking tot de gelijkheid van een aantal aanklevingen van vectorroosters en vectorrooster-algebra's van ordebegrensde operatoren.

Het materiaal in Hoofdstuk 4, dat voortbouwt op de eerdere onderdelen, is het nauwst gerelateerd aan de oorspronkelijke vraag met betrekking tot mogelijke analoga van von Neumanns bicommutantstelling voor vectorroosters. Het is, gebruikmakend van dit materiaal, inderdaad ook mogelijk om dergelijke analoga te verkrijgen. De betreffende resultaten zullen op een later tijdstip gepubliceerd worden.