

Cover Page



Universiteit Leiden



The handle <http://hdl.handle.net/1887/138942> holds various files of this Leiden University dissertation.

Author: Winter, R.L.

Title: Geometry and arithmetic of del Pezzo surfaces of degree 1

Issue Date: 2021-01-05

Samenvatting

Dit proefschrift bevat resultaten over de meetkunde en arithmetiek van del Pezzo oppervlakken van graad 1. Dit zijn de gladde oppervlakken in de gewogen projectieve ruimte $\mathbb{P}(2, 3, 1, 1)$ met coördinaten x, y, z, w gegeven door een vergelijking van de vorm

$$y^2 + a_1(z, w)xy + a_3(z, w)y = x^3 + a_2(z, w)x^2 + a_4(z, w)x + a_6(z, w),$$

waar $a_i \in k[z, w]$ homogeen van graad i is. Zo'n oppervlak bevat 240 krommen met negatieve zelfdoorsnijding, zogenaamde exceptionele krommen.

In Hoofdstuk 1 staat de voorkennis die nodig is voor de rest van het proefschrift. We nemen aan dat de lezer bekend is met algebraïsche meetkunde. Twee belangrijke onderwerpen die we hier behandelen zijn het elliptisch oppervlak dat ontstaat door het basispunt van het antikanonieke lineaire systeem op een del Pezzo oppervlak van graad 1 op te blazen, en de relatie tussen the exceptionele krommen op een del Pezzo oppervlak van graad 1 en het wortelsysteem $\mathbf{E}_8$.

Hoofdstuk 2 komt voort uit een samenwerking met Julie Desjardins. We bewijzen in dit hoofdstuk dat voor een del Pezzo oppervlak S van graad 1 over een getallenlichaam k , van de vorm

$$y^2 = x^3 + Az^6 + Bw^6$$

met $A, B \in k$ ongelijk aan nul, de verzameling $S(k)$ van k -rationale punten op S dicht ligt in de Zariski topologie dan en slechts dan als S een punt met z, w coördinaten ongelijk aan nul bevat, zodanig dat het corresponderende punt op het elliptisch oppervlak dat uit S wordt geconstrueerd op een

gladde vezel ligt en daar niet torsie is. We doen dit door een oneindige familie van multisecties te construeren, en te laten zien dat ten minste één van deze multisecties oneindig veel k -rationale punten bevat. Dit is het eerste resultaat dat zowel noodzakelijke als voldoende voorwaarden geeft voor het dicht liggen van de verzameling k -rationale punten op deze familie oppervlakken, waarbij k een willekeurig getallenlichaam is.

Hoofdstuk 3 is een aangepaste versie van het artikel [vLWa]. In dit hoofdstuk bestuderen we de werking van de Weyl groep W_8 op het wortelsysteem $\mathbf{E}_8$. De 240 wortels in $\mathbf{E}_8$ hebben een één-op-één relatie met de 240 exceptionele krommen op een del Pezzo oppervlak van graad 1, en we gebruiken resultaten uit dit hoofdstuk in Hoofdstukken 4 en 5. Toch is dit hoofdstuk ook apart te lezen, en interessant voor de lezer zonder interesse in del Pezzo oppervlakken maar met een interesse in $\mathbf{E}_8$. We definiëren de gewogen graaf Γ , waarin elk knooppunt een wortel vertegenwoordigt, en twee knooppunten verbonden zijn door een tak van gewicht w dan en slechts dan als de twee bijbehorende wortels inproduct w hebben. De groep van symmetrieën van Γ is de Weyl groep W_8 . We bewijzen dat voor een grote klasse van deelgrafen van Γ , twee deelgrafen isomorf zijn dan en slechts dan als er een symmetrie van Γ is die de ene deelgraaf op de andere afbeeldt. We geven ook invarianten die het isomorfismetype van een deelgraaf vastleggen. Daarnaast laten we zien dat voor twee isomorfe deelgrafen G_1 en G_2 uit deze klasse die niet een van 7 specifieke deelgrafen bevatten, elk isomorfisme tussen G_1 en G_2 uitbreidt tot een symmetrie van Γ . Deze resultaten kunnen gebruikt worden om berekeningen in de graaf Γ drastisch te reduceren.

Hoofdstuk 4 is een aangepaste versie van het artikel [vLWb]. In dit hoofdstuk bestuderen we de configuraties van de 240 exceptionele krommen op een del Pezzo oppervlak van graad 1, waarbij we resultaten uit Hoofdstuk 3 gebruiken. We bewijzen dat een punt op een del Pezzo oppervlak van graad 1 bevat is in ten hoogste 16 exceptionele krommen in karakteristiek 2, in ten hoogste 12 exceptionele krommen in karakteristiek 3, en in ten hoogste 10 exceptionele krommen in alle andere karakteristieken. We geven bovendien voorbeelden waarmee we laten zien dat deze bovengrenzen worden behaald in alle karakteristieken behalve misschien in karakteristiek 5.

Tot slot bewijzen we in Hoofdstuk 5 dat als ten minste 9 exceptionele krommen allemaal in een punt op een del Pezzo oppervlak S van graad 1 snijden, dat het corresponderende punt op het elliptisch oppervlak geconstrueerd uit S torsie op zijn vezel is. Dit blijkt niet zo triviaal te zijn

als sommige experts dachten. We gebruiken een lijst die in Hoofdstuk 3 is gemaakt van alle mogelijke configuraties van ten minste 9 exceptionele krommen die elkaar paarsgewijs snijden, en met een voorbeeld uit Hoofdstuk 4 laten we zien dat de equivalente stelling niet waar is voor 6 of minder exceptionele krommen.