



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Matching, entropy, holes and expansions

Langeveld, N.D.S.

Citation

Langeveld, N. D. S. (2019, December 10). *Matching, entropy, holes and expansions*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/81488>

Version: Publisher's Version

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/81488>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Cover Page



Universiteit Leiden



The following handle holds various files of this Leiden University dissertation:
<http://hdl.handle.net/1887/81488>

Author: Langeveld, N.D.S.

Title: Matching, entropy, holes and expansions

Issue Date: 2019-12-10

Samenvatting

In dit proefschrift staan ontwikkelingen van getallen centraal. Het meest bekende voorbeeld van ontwikkelingen van getallen is de decimaal ontwikkeling. Een ander voorbeeld is de binaire ontwikkeling van een getal. Echter zijn er nog veel meer manieren om getallen op te schrijven. In hoofdstuk 2, 3 en 4 worden variaties op reguliere kettingbreukontwikkelingen bestudeerd. In hoofdstuk 5 kijken we naar β -ontwikkelingen. Om ontwikkelingen van getallen te maken gebruiken we dynamische systemen. Eigenschappen van deze dynamische systemen geven ons informatie over de ontwikkelingen. Anderzijds kunnen de ontwikkelingen bijdragen aan een beter begrip van de dynamica van deze systemen. Verschillende systemen hebben verschillende eigenschappen. De waarde van de entropie is een voorbeeld van zo'n eigenschap. Matching is een eigenschap voor een verzameling dynamische systemen en verschillende systemen reageren verschillend wanneer er een gat in het systeem wordt gemaakt. Het fenomeen matching komt voor in hoofdstukken 2, 3 en 4 en entropie in hoofdstuk 3, 4 en 5. In hoofdstuk 3 en 5 worden gaten behandeld.

In hoofdstuk 2 wordt een familie van dynamische systemen geïntroduceerd met een oneindige invariante maat voor ieder systeem uit deze familie. Ieder dynamisch systeem wordt gegeven door een afbeelding (met bijbehorende ontwikkelingen die we omgedraaide α -kettingbreuken noemen) en in dit hoofdstuk worden deze afbeeldingen geparameteriseerd door $\alpha \in [0, 1]$. De afbeeldingen interpoleren tussen de klassieke kettingbreukafbeelding en een afbeelding die isomorf is met de terugwaartse kettingbreukafbeelding. Voor $\alpha < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ wordt een expliciete uitdrukking voor de invariante maat die absoluut continu is met betrekking tot de Lebesgue maat gevonden. Deze maten worden gevonden door gebruik te maken van de natuurlijke uitbreiding. Voor $\alpha < \frac{\sqrt{5}-2}{2}$ wordt berekend dat de Krengel entropie gelijk is aan $\frac{\pi^2}{6}$. Verder laten we zien dat de afbeeldingen AFN-afbeeldingen zijn. Hieruit volgen een aantal prettige eigenschappen, zoals een zwakke wet van grote aantallen.

In hoofdstuk 3 worden voornamelijk Ito Tanaka α -kettingbreuken bestudeerd. In het eerste deel vergelijken we deze familie met de α -kettingbreuken van Nakada. Bepaalde eigenschappen die voor beide families gelden worden bewezen op een manier zodat het bewijs werkt voor beide families. Een voorbeeld hiervan is de monotonie van de entropiefunctie op een matchinginterval. Het tweede deel is gericht op de Ito Tanaka α -kettingbreuken. We laten zien dat de parameterruimte bijna volledig wordt overdekt door matchingintervallen. Verder geven we karakterisaties van de verzameling punten die niet tot een matchinginterval behoren (de uitzonderingsverzameling). We vinden een opmerkelijk verschil tussen de Ito Tanaka α -kettingbreuken en de α -kettingbreuken van Nakada. Waar de uitzonderingsverzameling van de α -

kettingbreuken van Nakada geen rationale punten bevat, bestaan er wel rationale punten die in de uitzonderingsverzameling van de Ito Tanaka α -kettingbreuken zitten.

In hoofdstuk 4 worden omgedraaide N -kettingbreukontwikkelingen bestudeerd. Ook in hoofdstuk 2 lieten we omdraaien toe. Alleen nu combineren we ze met N -kettingbreukontwikkelingen. Dit geeft een erg grote verzameling dynamische systemen. In sommige gevallen kunnen we de invariante maat bepalen door gebruik te maken van de natuurlijke uitbreiding. Wanneer deze methode niet werkt, gebruiken we een numerieke methode die gebaseerd is op de Gauss-Kuzmin-Lévy Stelling. Deze methode geeft in een klein aantal iteraties een goede benadering. In het tweede deel bestuderen we een deelfamilie die we parameteriseren met α , waarna we de entropie bestuderen als functie van α . Voor $N = 2$ vinden we een matchinginterval en voor dit interval bewijzen we dat de entropie constant is. We laten ook zien dat de methoden van hoofdstuk 3 niet kunnen worden aangepast om voor deze deelfamilie resultaten te geven. In plaats daarvan doen we verkennend onderzoek met behulp van de computer en sluiten we af met vermoedens.

In hoofdstuk 5 worden bifurcatieverzamelingen die gerelateerd zijn aan β -ontwikkelingen bestudeerd. We nemen $\beta \in (1, 2]$ en beschouwen de gulzige β -transformatie. De bifurcatieverzameling E_β wordt gegeven door de verzameling $t \in [0, 1]$ waarvoor geldt dat $T_\beta^n(t) \geq t$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, waarbij T_β de gulzige β -transformatie is. We bewijzen dat voor alle $\beta \in (1, 2]$ geldt dat E_β Lebesguemaat nul heeft en volle Hausdorff-dimensie. Verder laten we zien dat voor bijna alle $\beta \in (1, 2]$ geldt dat E_β oneindig veel verdichtingspunten heeft in een omgeving van nul en ook oneindig veel geïsoleerde punten. We karakteriseren die waarden van β waarvoor E_β geen geïsoleerde punten heeft en bewijzen dat deze verzameling Hausdorff-dimensie nul heeft. Aan de andere kant laten we zien dat de verzameling $\beta \in (1, 2]$ waarvoor geldt dat er geen geïsoleerde punten zijn in E_β afgezien van een omgeving van nul, volle Hausdorff-dimensie heeft. Ook deze verzameling wordt gekarakteriseerd. In het laatste deel bestuderen we de kritieke waarde τ_β , gedefinieerd als de waarde waarvoor geldt dat voor alle $t < \tau_\beta$ de Hausdorff-dimensie van de verzameling die het onder iteratie van T_β niet in het gat $(0, \tau_\beta)$ vallen strikt positief is en voor alle $t \geq \tau_\beta$ de Hausdorff-dimensie nul is. Voor τ_β geven we afschattingen in termen van β .