



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Arithmetic of affine del Pezzo surfaces

Lyczak, J.T.

Citation

Lyczak, J. T. (2019, October 1). *Arithmetic of affine del Pezzo surfaces*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/78474>

Version: Publisher's Version

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/78474>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Cover Page



Universiteit Leiden



The following handle holds various files of this Leiden University dissertation:
<http://hdl.handle.net/1887/78474>

Author: Lyczak, J.T.

Title: Arithmetic of affine del Pezzo surfaces

Issue Date: 2019-10-01

Samenvatting

Dit proefschrift met de titel 'De arithmetiek van affiene del Pezzo oppervlakken' valt binnen de tak *arithmetische meetkunde* van de wiskunde. Deze samenvatting begint met een algemene introductie van dit vakgebied om vervolgens de specifieke onderwerpen en de belangrijkste resultaten uit dit proefschrift kort te behandelen.

Wat is arithmetische meetkunde?

In de *getaltheorie* is het gebruikelijk om vergelijkingen zoals $x^2 + y^3 = 5$ op te lossen in rationale getallen. Dat wil zeggen dat men geïnteresseerd is in paren van breuken x en y waarvoor deze vergelijking klopt. Zo'n oplossing noemt men een *rationale oplossing*. Sommige rationale oplossingen kunnen gevonden worden door kleine getallen te proberen voor x en y . De oplossingen $x = 2$ en $y = 1$, en $x = -2$ en $y = 1$ van de bovenstaande vergelijking zijn daar voorbeelden van.

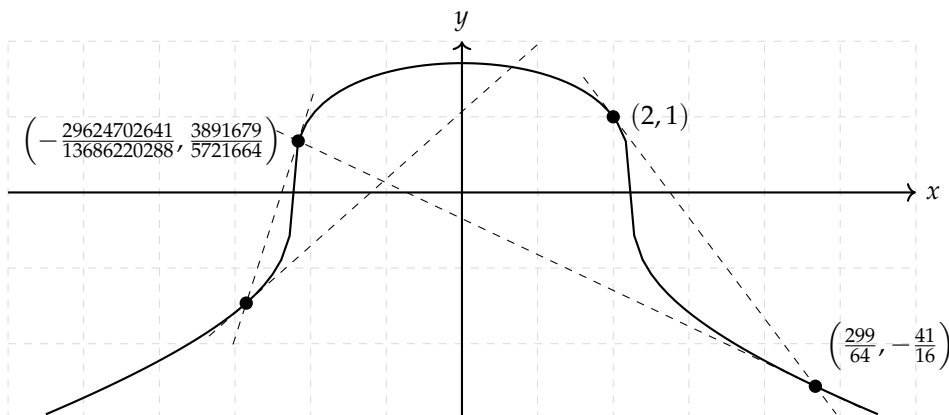
In de *arithmetische meetkunde* worden zulke vraagstukken benaderd met behulp van meetkundige technieken en terminologie. Ter illustratie; men kan alle reële punten op het xy -vlak tekenen waarvoor de vergelijking $x^2 + y^3 = 5$ waar is. Dit levert een gekromde lijn op zoals in de figuur op de volgende pagina. Het feit dat $x = 2$ en $y = 1$ een oplossing is van de vergelijking, laat zich nu vertalen naar de uitspraak dat het punt $(2, 1)$ op dit meetkundige object ligt.

Deze interpretatie verklaart waarom een oplossing van een vergelijking ook vaak een *punt* wordt genoemd; het is eenvoudigweg een punt op het meetkundige object gedefinieerd door de vergelijking. De termen *oplossingen* en *punt* worden dan ook uitwisselbaar gebruikt.

We zullen nu laten zien dat de vergelijking $x^2 + y^3 = 5$ oneindig veel rationale oplossingen heeft. Men kan laten zien dat als (x, y) een rationale oplossing is, dat de volgende formule ook een andere rationale oplossing geeft:

$$\left(\frac{y^3 + 10}{2x} - \frac{3y^3 y^3 + 40}{8x y^3 - 5}, \frac{y y^3 + 40}{4 y^3 - 5} \right).$$





Als we beginnen met het punt $(x, y) = (2, 1)$ dan kunnen we deze formule herhaaldelijk gebruiken en vinden we de volgende oplossingen

$$(2, 1) \mapsto \left(\frac{299}{64}, -\frac{41}{16}\right) \mapsto \left(-\frac{29624702641}{13686220288}, \frac{3891679}{5721664}\right) \mapsto \dots$$

De achterdochtige lezer staat het vrij om te controleren dat deze paren van rationale getallen daadwerkelijke oplossingen zijn van de vergelijking $x^2 + y^3 = 5$.

Deze formule om nieuwe oplossingen te construeren is zowel lelijk als mysterieus, maar deze procedure heeft een uiterst mooie meetkundige interpretatie: neem het meetkundige object gegeven door de vergelijking $x^2 + y^3 = 5$. Teken de raaklijn aan dit object in het punt $(2, 1)$ en doorsnij deze lijn opnieuw met het object. Dit snijpunt is $\left(\frac{299}{64}, -\frac{41}{16}\right)$; precies het punt dat we verkregen met behulp van bovenstaande vergelijkingen. Om het volgende punt te bepalen tekenen we vervolgens de raaklijn in het punt $\left(\frac{299}{64}, -\frac{41}{16}\right)$ en doorsnijden dit wederom met het meetkundige object. Deze procedure kunnen we blijven herhalen om zo oneindig veel rationale punten te vinden.

Dit is een eerste voorbeeld van hoe meetkundige technieken gebruikt kunnen worden bij het bestuderen van vergelijkingen. Daarnaast worden ook meetkundige eigenschappen gebruikt om vergelijkingen te classificeren. De vergelijking hierboven beschrijft een ‘gebogen lijn’ en zo’n meetkundig object noemen we een *kromme*. Dit proefschrift gaat echter over *oppervlakken* welke er meer uitzien als ‘gebogen, gedraaide en getwiste vlakken’ zoals de figuur op de omslag.

Oppervlakken

Er zijn meerdere manieren om van vergelijkingen van krommen over te gaan op vergelijkingen van oppervlakken. Een eerste manier is door een derde variabele

toe te voegen en die zullen we hier z noemen. De vergelijking $x^3 + y^3 + z^3 = 4$ beschrijft bijvoorbeeld een oppervlak. Bovendien heeft het veel oplossingen zoals onder andere

$$\left(\frac{1}{21}, \frac{5}{3}, -\frac{6}{7}\right).$$

Een tweede manier om oppervlakken te beschrijven is door niet alleen variabelen, maar ook vergelijkingen toe te voegen. Neem het systeem van de volgende twee vergelijkingen met de vier variabelen w, x, y en z .

$$\begin{cases} w^2 + x^2 + y^2 = 6, \\ w^2 + xy + yz = 2. \end{cases}$$

We kunnen de viertallen (w, x, y, z) bestuderen waarvoor *beide* vergelijkingen kloppen. Men kan controleren dat $(1, 2, 1, -1)$ en $(\frac{1}{5}, -2, -\frac{7}{5}, -\frac{21}{5})$ oplossingen zijn van dit systeem van vergelijkingen.

Deze twee oppervlakken zijn voorbeelden van zogenaamde *ampele log K3 oppervlakken*. Soms worden ampele log K3 oppervlakken aangeduid met, al zij het enigzins onnauwkeurig, *affiene del Pezzo oppervlakken*, zoals ook in de titel van dit proefschrift.

Een derde voorbeeld van een ampel log K3 oppervlak wordt gegeven door het systeem van vijf vergelijkingen

$$\begin{cases} 1 + 1952wy + 412071wz = \\ \quad 121v + 492x + 52838z + vx + 22vy + 971038xz + 1771110z^2, \\ w + 88wy + 20504wz + 16xy = \\ \quad 11v + 22x + 4y + 3267z + vy + 39017xz + 78089z^2, \\ v + x + 169z + 220z^2 = w^2 + 4wy + 451wz + 500xz, \\ y + 121wz = 11z + wx + 4xy + 363xz + 594z^2, \\ z + x^2 + 40xz + 55z^2 = wy + 11wz \end{cases} \quad (*)$$

in de vijf variabelen v, w, x, y en z . Het oppervlak beschreven door dit systeem heeft veel rationale punten, zoals bijvoorbeeld

$$\left(-20, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, 0\right) \quad \text{en} \quad \left(\frac{23}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 0\right).$$

Ondanks de afzichtelijke vergelijkingen is de meetkunde van dit oppervlak erg mooi. Zo siert een interessante meetkundige eigenschap van dit oppervlak de omslag van dit proefschrift. Namelijk, ondanks dat dit oppervlak erg kronkelt is het toch mogelijk om langs een rechte lijn over dit oppervlak te lopen. Merk op dat er precies tien van zulke rechte lijnen op dit oppervlak liggen.

Het aantal rechte lijnen onderscheidt dit oppervlak van de eerste twee voorbeelden. Het is namelijk al aangetoond dat er op die oppervlakken respectievelijk 27 en 16 lijnen liggen. De lezer wordt geadviseerd om een plaatje te



bekijken van de 27 lijnen op het Clebsch oppervlak. Een online zoektocht met de Engelse termen 'lines Clebsch surface' levert al snel een overdaad aan schitterende plaatjes op.

Ampele log K3 oppervlakken met 10 lijnen zijn een belangrijk onderwerp van dit proefschrift. Er zijn technische redenen, waar we niet op in zullen gaan, om deze oppervlakken aan te duiden als *ampele log K3 oppervlakken van graad 5*. Dit in tegenstelling tot de twee eerdere voorbeelden van ampele log K3 oppervlakken die van respectievelijk graad 3 en 4 zijn. Ook dit is een goed voorbeeld van hoe een meetkundige eigenschap, namelijk het aantal rechte lijnen op een oppervlak, wordt gebruikt om vergelijkingen te classificeren.

Gehele punten

We zullen ons nu beperken tot het ampele log K3 oppervlak van graad 5 gedefinieerd door het systeem van vergelijkingen (\star). We hebben al gezien dat er op dit oppervlak rationale punten liggen. Een vervolgvraag is of sommige van deze rationale oplossingen zelfs oplossingen in gehele getallen zijn. In dat geval praten we over *gehele punten* en *gehele oplossingen*.

De twee rationale oplossingen hierboven zijn overduidelijk niet geheel, maar dit is natuurlijk geen garantie dat geen van de rationale punten geheel is. Het is even goed mogelijk dat er geen enkel geheel punt is.

Een verklaring voor de afwezigheid van punten noemt men een *obstructie*. Een voorbeeld van zo'n obstructie was ontdekt door Manin. Hij gebruikte een zeer technisch object namelijk de *Brauer-groep* van een systeem van vergelijkingen. Als zo'n obstructie het bestaan van gehele punten uitsluit, dan praten we over een *Brauer–Manin-obstructie voor het bestaan van gehele punten*. In dat geval kunnen we dus ook daadwerkelijk bewijzen dat er geen gehele punten zijn. In dit proefschrift heb ik deze techniek toegepast op het systeem (\star).

STELLING 1. *Er is een Brauer–Manin-obstructie voor het bestaan van gehele oplossingen voor het systeem van vergelijkingen (\star). Dit systeem heeft dus geen gehele oplossingen.*

In Hoofdstuk 4 wordt een algemene methode beschreven om te bepalen of een ampele log K3 oppervlak van graad 5 een Brauer–Manin-obstructie heeft. Met behulp hiervan heb ik oneindig veel systemen van vergelijkingen gevonden welke geen gehele oplossingen hebben.

Begrenzen van de Brauer-groep

Je zou je ook kunnen afvragen of het in het algemeen mogelijk is om een computer te laten bepalen of een systeem van vergelijkingen een Brauer–Manin-obstructie heeft. Over het algemeen hangt het antwoord van deze vraag af van de complexiteit van de Brauer-groep. Helaas is het bekend dat de Brauer-groep

van een oppervlak willekeurig complex kan zijn. Dit wil zeggen dat voor elk oppervlak er een ander oppervlak is met een nog complexere Brauer-groep. Het belangrijkste resultaat uit Hoofdstuk 3 zegt dat dit gelukkig niet het geval is als men zich beperkt tot de ampele log K3 oppervlakken van willekeurige graad.

STELLING 2. *Er is een grens aan de complexiteit van Brauer-groepen van ampele log K3 oppervlakken.*

Deze begrenzing geeft aan dat de Brauer-groepen van ampele log K3 oppervlakken niet willekeurig complex kunnen zijn. Dit is belangrijke informatie bij het ontwikkelen van een algoritme dat bepaalt of er een Brauer–Manin-obstructie is voor gecompliceerde systemen van vergelijkingen zoals systeem (*).



