Universiteit Leiden
The Netherlands

Inverse Jacobian and related topics for certain superelliptic curves

Somoza Henares, A.

Citation

Somoza Henares, A. (2019, March 28). *Inverse Jacobian and related topics for certain superelliptic curves*. Retrieved from https://hdl.handle.net/1887/70564

Version:	Not Applicable (or Unknown)
License:	Leiden University Non-exclusive license
Downloaded from:	https://hdl.handle.net/1887/70564

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Cover Page

Universiteit Leiden

Leiden University Repository

The handle http://hdl.handle.net/1887/70564 holds various files of this Leiden University dissertation.

Author: Somoza Henares, A.
Title: Inverse Jacobian and related topics for certain superelliptic curves
Issue Date: 2019-03-28

Resumen

Dada una *curva elíptica* E sobre $\mathbb{C}$, existe una *red* $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ tal que el grupo $E(\mathbb{C})$ de puntos complejos en E es isomorfo al grupo analítico complejo $\mathbb{C}/\Lambda$. Esta connexión entre curvas elípticas y toros de dimensión 1 se conoce como el Teorema de la Uniformización de Riemann, y es posible encontrar de forma explícita la curva correspondiente a una cierta red mediante la *función $\wp$ de Weierstrass*, su derivada, y las *series de Eisenstein*.

De forma similar, dada una curva algebraica C de género g, podemos definir una *variedad abeliana principalmente polarizada* $J(C)$, la *Jacobiana de C*. Sobre $\mathbb{C}$, la Jacobiana $J(C)$ es isomórfa a un toro complejo g-dimensional $\mathbb{C}^g/\Lambda$ para una red Λ de rango completo en $\mathbb{C}^g$.

Esto determina una función J del conjunto M_g de clases de isomorfismo de curvas algebraicas de género g al conjunto A_g de variedades abelianas principalmente polarizadas de dimensión g, y nos preguntamos si existe una función inversa explícita, como en el caso de las curvas elípticas. Se trata del *problema de la Jacobiana inversa.*

Este problema ha sido resuelto para curvas de género 2 [37, 50] y género 3 [1, 9, 16, 21, 48, 52, 53]. Sin embargo, para género $g \geq 4$, tenemos el obstáculo añadido de que no todas las variedades abelianas principalmente polarizadas son Jacobianas de curvas, por lo que para resolver el problema de la Jacobiana inversa tenemos que estudiar la imagen vía J de M_g en A_g. El problema de describir $J(\mathsf{M}_g)$ se conoce como el *problema de Riemann-Schottky.*

En esta tesis tratamos estos dos problemas para dos familias de curvas superelípticas, es decir, curvas de la forma $y^k = \prod_{i=1}^{l}(x - \alpha_i)$. Nos centramos en la familia de curvas de Picard, con $(k, l) = (3, 4)$ y género 3, donde solucionamos el problema de la Jacobiana inversa, y la família de las curvas cíclicas quínticas planas (curvas CPQ), con $(k, l) = (5, 5)$ y género 6, para la que resolvemos ambos problemas.

En el Capítulo 1 introducimos algunos preliminares de variedades abelianas, Jacobianas de curvas y constantes teta de Riemann, y a continuación presentamos un algoritmo de Jacobiana inversa para las curvas de Picard. Dado que las curvas de Picard tienen género 3, no hay obstrucción al problema de la Jacobiana inversa.

Dado que las curvas de Picard son curvas cuárticas planas, el problema de la Jacobiana inversa se resolvería con las ideas para el problema de la Jacobiana inversa para cuárticas planas que encontramos en [52]. Sin embargo, concentrarnos en una familia más reducida de curvas nos permite presentar una solución más eficiente para la familia en cuestión.

Esto lo hicieron originalmente Koike y Weng en [16], pero su exposición presenta algunos errores que corregimos aquí. El capítulo está basado en una colaboración con Joan-Carles Lario, véase también [21].

En el Capítulo 2 presentamos un algoritmo de la Jacobiana inversa para las curvas CPQ. Seguimos una estrategia análoga a la del Capítulo 1 para el caso de curvas de Picard.

En el Capítulo 3 lidiamos con en el problema de Riemann-Schottky para curvas CPQ, es decir, caracterizamos las variedades abelianas principalmente polarizadas que son Jacobianas de curvas CPQ. Primero usamos una generalización de la teoría clásica de multiplicación compleja de Shimura [39] para estudiar cómo la existencia del automorfismo de curvas CPQ $(x, y) \mapsto (x, \exp(2\pi i/5)y)$ afecta la estructura de las Jacobianas. A continuación resolvemos un problema de número de clases 1 para redes hermíticas de dimensión superior sobre $\mathbb{Z}[\zeta_5]$.

Finalmente, en el Capítulo 4 presentamos una aplicación de los algoritmos anteriores: construir curvas cuyas Jacobianas tengan multiplicación compleja (CM). Esto se ha hecho anteriormente para género 2 [51, 47] y género 3 [1, 13, 16, 21, 53]. Aquí extendemos los métodos de Kılıçer [12] para determinar una lista completa de cuerpos CM cuyo anillo de enteros se da como el anillo de endomorfismos sobre $\mathbb{C}$ de la Jacobiana de una curva CPQ sobre $\mathbb{Q}$.

En particular, ésto nos permite listar modelos conjeturales para todas las curvas CPQ sobre $\mathbb{Q}$ cuyas Jacobianas tienen el orden maximal de un cuerpo CM de grado 12 como anillo de endomorfismos sobre $\mathbb{C}$. Nuestra lista contiene el número previsto de curvas, y éstas están definidas sobre $\mathbb{Q}$ y son numéricamente correctas hasta un cierto grado de precisión.