Inverse Jacobian and related topics for certain superelliptic curves

Somoza Henares, A.

Author: Somoza Henares, A.
Title: Inverse Jacobian and related topics for certain superelliptic curves
Issue Date: 2019-03-28

Samenvatting

Voor elke *elliptische kromme* E over $\mathbb{C}$ bestaat er een *rooster* $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$, zodanig dat de groep $E(\mathbb{C})$ van complexe punten op E isomorf is met de complex analytische groep $\mathbb{C}/\Lambda$. Dit verband tussen elliptische krommen en één-dimensionale complexe tori heet de Uniformisatiestelling, en de constructie in omgekeerde richting (van roosters naar krommen) kan expliciet worden beschreven met de *Weierstrass* $\wp$*-functie*, zijn afgeleide, en de *Eisenstein-reeksen*.

Algemener kennen we aan een algebraïsche kromme C van geslacht g een *hoofdgepolariseerde abelse variëteit* $J(C)$ toe, de *Jacobiaan van* C. Over $\mathbb{C}$ is de Jacobiaan $J(C)$ isomorf met een g-dimensionale complexe torus $\mathbb{C}^g/\Lambda$ voor een rooster Λ van volledige rang in $\mathbb{C}^g$.

Dit bepaalt een afbeelding J van de verzameling M_g van isomorfieklassen van algebraïsche krommen van geslacht g naar de verzameling A_g van g-dimensionale hoofdgepolariseerde abelse variëteiten. We kunnen ons afvragen of er een expliciete inverse afbeelding bestaat, zoals het geval is voor elliptische krommen. Dit is het *inverse-Jacobiaan-probleem.*

Dit probleem is opgelost voor krommen van geslacht 2 [37, 50] en geslacht 3 [1, 9, 16, 21, 48, 52, 53]. Voor geslacht ≥ 4 is er echter de extra obstructie dat niet alle hoofdgepolariseerde abelse variëteiten Jacobianen van krommen zijn, dus om het inverse-Jacobiaan-probleem op te lossen moeten we in dit geval het beeld van M_g in A_g onder J bestuderen. Het beschrijven van $J(\mathsf{M}_g)$ staat bekend als het *Riemann-Schottky-probleem.*

In dit proefschrift behandelen we deze twee problemen voor twee families van *superelliptische krommen*, dat wil zeggen, krommen gegeven door $y^k = \prod_{i=1}^{l}(x - \alpha_i)$. We richten ons op de familie van *Picard-krommen*, met $(k, l) = (3, 4)$ en van geslacht 3, waarvoor we het inverse-Jacobiaan-probleem oplossen en de familie van *cyclische vlakke vijfdegraads krommen* (CPQ-krommen), met $(k, l) = (5, 5)$ en van geslacht 6, waarvoor we beide problemen oplossen.

In Hoofdstuk 1 introduceren we eerst achtergrondkennis over abelse varieteiten, Jacobianen van krommen en Riemann theta constanten. Daarna geven we een inverse-Jacobiaan-algoritme voor Picard-krommen. Merk op dat

Picard-krommen geslacht 3 hebben, en er dus geen obstructie voor het inverse-Jacobiaan-probleem is.

Picard-krommen zijn een speciaal geval van vlakke vierdegraads krommen, dus het inverse-Jacobiaan-probleem voor Picard-krommen kan worden opgelost met behulp van de formules voor vlakke vierdegraads krommen gegeven in [52], maar de beperking tot een kleinere familie van krommen zorgt ervoor dat we een efficiëntere oplossing voor deze familie kunnen geven.

Dit is oorspronkelijk gedaan door Koike en Weng in [16], maar hun uiteenzetting bevat een aantal fouten die we hier aankaarten en corrigeren. Dit hoofdstuk is gebaseerd op gezamenlijk werk met Joan-Carles Lario, zie ook [21].

In Hoofdstuk 2 geven we een inverse-Jacobiaan-algoritme voor CPQ-krommen. We volgen een strategie analoog aan die in Hoofdstuk 1 voor het geval van Picard-krommen.

In Hoofdstuk 3 pakken we het Riemann-Schottky-probleem voor CPQ-krommen aan, dat wil zeggen dat we de hoofdgepolariseerde abelse variëteiten die Jacobianen van CPQ-krommen zijn classificeren. Eerst gebruiken we Shimura's algemene vorm van de theorie van *complexe vermenigvuldiging*, zie [39], om te bestuderen hoe het bestaan van het automorfisme $(x, y) \mapsto (x, z_5 y)$ met $z_5 = \exp(2\pi i/5)$ van een CPQ-kromme de structuur van de Jacobiaan beïnvloedt. Vervolgens lossen we een klassengetal-één-probleem voor hogerdimensionale Hermitese roosters over $\mathbb{Z}[\zeta_5]$ op, wat cruciaal is voor het oplossen van het Riemann-Schottky-probleem voor CPQ-krommen.

Tot slot geven we in Hoofdstuk 4 een toepassing van bovenstaande algoritmes: het construeren van krommen waarvan de Jacobianen complexe vermenigvuldiging toestaan. Dit is eerder gedaan voor geslacht 2 [51, 47] en geslacht 3 [1, 13, 16, 21, 53]. Hier breiden we methoden van Kılıçer [12] uit om een complete lijst van CM-lichamen te bepalen waarvan de ringen van gehelen voorkomen als endomorfismering over $\mathbb{C}$ van de Jacobiaan van een CPQ-kromme over $\mathbb{Q}$.

In het bijzonder geeft dit ons de mogelijkheid om een lijst te geven met vermoedelijke modellen voor alle CPQ-krommen over $\mathbb{Q}$ waarvan de Jacobianen de maximale orde van een CM lichaam van graad 12 als endomorfismering over $\mathbb{C}$ hebben. Onze lijst bevat het juiste aantal krommen, die gedefinieerd zijn over $\mathbb{Q}$ en numeriek correct met hoge nauwkeurigheid.