Counting points on K3 surfaces and other arithmetic-geometric objects

Visse, H.D.

Author: Visse, H.D.
Title: Counting points on K3 surfaces and other arithmetic-geometric objects
Issue Date: 2018-12-18

Nederlandse samenvatting

Hier is de rol papier,
de inhoud en de optelsom van mijn fortuin

Bassanio, DE KOOPMAN VAN VENETIË, Scene 3.2, regels 132-133

Dit proefschrift valt in het vakgebied van de 'aritmetische meetkunde', dat is het samenspel van aritmetiek, in het Nederlands ookwel rekenkunde, aan de ene kant – gehele getallen, hun optelling en vermenigvuldiging, en hun breuken – en meetkunde aan de andere – vormen en hun doorsnijdingen. We beschouwen drie verschillende vragen en in elk van deze vragen zijn we op enige manier geïnteresseerd in het tellen van hoe groot een zekere verzameling kan zijn.

In de aritmetische meetkunde zijn we geïnteresseerd in zogenaamde *polynomiale* vergelijkingen: we beperken onszelf tot breuken van gehele getallen en een willekeurig aantal variabelen. De operaties die we mogen toepassen zijn slechts optelling, vermenigvuldiging, en machtsverheffen met positieve gehele machten. Dat betekent dus geen vierkantswortels, logaritmes, of trigonometrische functies. Dat voelt misschien als een opluchting (we mogen immers de helft van onze schoolwiskunde vergeten), maar de vragen die opkomen blijken verrassend moeilijk te zijn. Sommige daarvan dateren in ieder geval terug tot de oude Grieken, zo niet verder!

Wat zijn dan de vragen die we willen bestuderen? Neem bijvoorbeeld de vergelijking

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{5.1}$$

Misschien weet u nog wel van dat deel van de schoolwiskunde dat we niet zojuist vergeten zijn dat dit de vergelijking is van een cirkel in het platte vlak. In andere woorden: als we onze assen x en y noemen, en we tekenen alle punten in het vlak die x- en y-coördinaten hebben die aan de vergelijking voldoen, dan neemt onze tekening de vorm van een cirkel aan. Dit is waar de meetkunde natuurlijkerwijs naar voren komt. Hoe zit dat met de rekenkunde? Nou, we kunnen niet *alle* punten van de cirkel individueel tekenen – dat zijn er simpelweg te veel. Laten we ze in twee verzamelingen opsplitsen. Een verzameling, die we S zullen noemen, geven we alle punten waarvan de coördinaten x en y breuken van gehele getallen zijn. Bijvoorbeeld $(0,1)$ ligt in S en zo ook $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. De andere verzameling geven we alle andere punten, bijvoorbeeld $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$; deze zullen we negeren. De verzameling S is nog steeds oneindig groot, dus laten we ons verder beperken. Wat als we niet alle mogelijke breuken toelaten, maar alleen die waarvan de teller en de noemer klein zijn, zeg kleiner dan een getal B dat we vrij mogen kiezen? Deze nieuwe verzameling is wel eindig, dus we kunnen het aantal elementen N tellen, welke zal afhangen van wat we kiezen voor B.

Vraag 1: Hoe hangt dit getal N precies van B af?

In dit geval is het niet al te ingewikkeld om het antwoord te vinden en het blijkt een lineaire functie in B te zijn. Maar als we vergelijking (5.1) vervangen door een ingewikkeldere vergelijking, zeg

$$x^4 + y^4 - 3z^4 = 1, \tag{5.2}$$

dan wordt de vraag een stuk moeilijker. Met de extra variabele z wordt de dimensie van het corresponderende meetkundige object verhoogd naar twee (terwijl de cirkel dimensie één heeft), en met de hogere exponent 4 worden de vormen ingewikkelder. Voor vergelijkingen van deze vorm bestaat er tot nog toe geen bewezen antwoord. In Hoofdstuk 2 geven we bewijsmateriaal (hetgeen niet synoniem is aan 'bewijs') dat laat zien dat het antwoord een zekere expliciete macht van $\log B$ zou moeten zijn. Dus om het antwoord te begrijpen, moeten we opnieuw over logaritmes leren!

Hoofdstuk 3 behandelt een gelijksoortige vraag, en om deze vraag te begrijpen, moeten we iets leren over modulaire rekenkunde. In essentie is dat rekenkunde zoals op een klok: iedere 12 uur wordt de tijd op de klok herhaald. Hoe kunnen we dit in wiskunde vertalen? Op de klok weten we dat 13 gelijk is aan 1, 14 aan 2, enzovoorts. Wiskundig gezien stellen we een getal gelijk aan zijn rest bij deling door 12. We hebben $13 = 1 \times 12 + 1$, en $14 = 1 \times 12 + 2$ en zo verder. Er is geen reden om te stoppen bij 24: we hebben ook $35 = 2 \times 12 + 11$, dus we stellen 35 en 11 gelijk. Bovendien is er wiskundig niets speciaals aan het getal 12. We zouden ons een klok kunnen voorstellen met ieder willekeurig aantal 'uren'.

Nu vervangen we (5.1) door een andere vergelijking dan eerst. Bijvoorbeeld kunnen we ook kijken naar de ellips met de vergelijking

$$x^2 + 3y^2 = 2. \tag{5.3}$$

Met behulp van de modulaire rekenkunde die we zojuist geïntroduceerd hebben, is het niet zo moeilijk om aan te tonen dat deze vergelijking geen oplossingen heeft waarbij x en y breuken zijn. Vergelijkingen (5.1) en (5.3) lijken heel veel op elkaar, en we kunnen een *familie* van vergelijkingen opschrijven waarvan beide lid zijn. In dit geval zijn beide vergelijkingen lid van de familie die gedefinieerd wordt door

$$x^2 + (1 + 2t)y^2 = 1 + t. \tag{5.4}$$

Wanneer we waarden voor de parameter t kiezen, krijgen we de leden van deze familie. Als we bijvoorbeeld $t = 0$ kiezen, dan herontdekken we vergelijking (5.1), en voor $t = 1$ vinden we vergelijking (5.3) terug.

Vraag 2: Gegeven een zekere familie, kunnen we het aantal leden tellen dat een oplossing in breuken heeft?

Dit aantal zou oneindig kunnen zijn, dus we moeten onze vraag voorzichtiger stellen. Bijvoorbeeld kunnen we ons beperken tot alleen die leden die horen bij een t die zelf een breuk is waarvan de teller en de noemer niet groter zijn dan een zekere grenswaarde B. Nu worden we weer geconfronteerd met een vraag die in eenvoudige termen te beschrijven is, en weer blijkt het antwoord lastig te bewijzen. Er zijn zelfs goede redenen om te geloven dat er een onderliggend dieper verband is tussen de antwoorden van Vragen 1 en 2, maar begrip hiervan lijkt nog vrij ver weg te zijn. In Hoofdstuk 3 kijken we naar families van een zekere voorgeschreven vorm en beantwoorden we deze telvraag in zijn geheel: we geven een formule voor het aantal dat we wilden tellen. Er zijn twee belangrijke observaties hierbij: in de literatuur zijn zulke formules zeldzaam – normaal kan men slechts bovengrenzen geven – en de formule omvat een ingewikkelde constante die we hebben ontrafeld. De wijze waarop deze constante is opgebouwd voorziet ons van verder bewijsmateriaal voor het diepere verband waarop we hierboven al zinspeelden.

Vergelijking (5.3) heeft geen oplossingen in breuken wegens problemen die uit de modulaire rekenkunde komen. Men zou zich kunnen afvragen of dit de enige problemen zijn die kunnen voorkomen, en dit is precies wat Yuri Manin deed in de jaren ’70 van de vorige eeuw. Hij beschreef een constructie die het bestaan van *obstructies* tot oplossingen in breuken kan verklaren; deze constructie maakt gebruik van een verzameling die we de *Brauergroep* noemen. Voor veel simpele meetkundige objecten worden al zulke obstructies verklaard door de constructie van Manin, maar dit hoeft niet altijd het geval te zijn. Laten we terugkijken naar vergelijkingen van de vorm (5.2) die we in Hoofdstuk 2 bestudeerd hebben. Hun meetkundige objecten zijn voorbeelden van wat we K3-oppervlakken noemen. Recent zijn onderzoekers begonnen zich af te vragen of de constructie van Manin sterk genoeg is om alle obstructies tot oplossingen in breuken voor K3-oppervlakken te verklaren, en deze vraag is nog onbeantwoord. Om richting een antwoord te werken, bestuderen we deze Brauergroepen voor een bepaald type K3-oppervlakken in Hoofdstuk 4. Het is bekend dat Brauergroepen van K3-oppervlakken slechts eindig veel elementen kunnen hebben, maar de stelling die dit laat zien zegt niets over het precieze aantal.

Vraag 3: Hoe groot kan de Brauergroep van een K3-oppervlak zijn?

Ons resultaat geeft een recept dat als ingrediënten slechts een aantal basale waardes heeft die gemoeid zijn met het oppervlak waarvan men de Brauergroep wil bestuderen. Onze methode geeft desalniettemin geen exact antwoord, maar slechts een bovengrens. Wij zijn niet de eersten die zo'n bovengrens geven, maar ons resultaat heeft het voordeel dat het gemakkelijk is uit te rekenen. Er is daarentegen geen enkele reden om aan te nemen dat onze bovengrens op enige wijze *scherp* is, hetgeen betekent dat deze bovengrenzen ver boven de werkelijke waarde kunnen liggen.

Ter afsluiting, de titel van dit proefschrift gaat in tegen de grootste kracht van de wiskunde: het beschrijven van complexe fenomenen zonder ruimte voor dubbelzinnigheid. De titel, vertaald naar het Nederlands, kan op twee manieren opgedeeld worden. Een lezing als "Het tellen van punten op (K3-oppervlakken en andere rekenkundig-meetkundige objecten)" benadrukt dat we in elk hoofdstuk ons richten op het tellen van zekere hoeveelheden, terwijl een lezing als "(Het tellen van punten op K3-oppervlakken) en andere rekenkundig-meetkundige objecten" juist naar voren brengt dat we in eerste instantie geïnteresseerd zijn in K3-oppervlakken, maar dat dit proefschrift ook andere resultaten bevat. In dit geval schaadt de dubbelzinnigheid niet: beide manieren van lezen zijn correct.