



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Breaking of ensemble equivalence for complex networks

Roccaverde, A.

Citation

Roccaverde, A. (2018, December 5). *Breaking of ensemble equivalence for complex networks*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/67095>

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/67095>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Cover Page



Universiteit Leiden



The following handle holds various files of this Leiden University dissertation:

<http://hdl.handle.net/1887/67095>

Author: Roccaverde, A.

Title: Breaking of ensemble equivalence for complex networks

Issue Date: 2018-12-05

Samenvatting

Dit proefschrift presenteert nieuwe resultaten over het breken van ensemble equivalentie voor complexe netwerken met randcondities. We vergelijken het microkanonieke ensemble, waarbij de randcondities precies worden afgedwongen, met het kanonieke ensemble, waarbij de randcondities slechts gemiddeld worden afgedwongen. We geven voorbeelden van randcondities waarvoor beide ensembles niet equivalent zijn.

We bestuderen klassen van unipartite grafen in hoofdstuk 2 en laten zien dat het niet-equivalent zijn van de beide ensembles zich manifesteert via een nieuw mechanisme. Dit mechanisme is niet gerelateerd aan een faseovergang of niet-lineariteit, maar aan de aanwezigheid van een groot aantal locale topologische beperkingen.

Door een algemene klasse van random grafen met een variabel aantal randcondities te gebruiken, laten we zien dat een groot aantal randcondities de ensemble equivalentie breekt. We beginnen met de karakterisering van het breken van equivalentie in eenvoudige situaties met unipartite en bipartite grafen, zoals beschreven in [92]. Vervolgens beschouwen we een algemene klasse van grafen met een veellagenstructuur, waarbij de connectiviteit binnen de lagen en tussen de lagen kan worden aangepast.

De stellingen in hoofdstuk 2, die voornamelijk van toepassing zijn op het lagedichtheidsregime, karakteriseren niet alleen het breken equivalentie, maar geven ook een kwantitatieve formule voor de specifieke relatieve entropie. We onderzoeken belangrijke gevolgen van deze stellingen, zowel in de algemene context als in specifieke gevallen die van empirisch belang zijn. Bovendien geven we een interpretatie van de specifieke-relatieve-entropie formule in termen van Poissonisatie van de graden.

Het hogedichtheidsregime wordt bestudeerd in hoofdstuk 3, waar een formule voor de relatieve entropie gebaseerd op de covariantiestructuur van het kanonieke ensemble, zoals recent voorgesteld door Garlaschelli en Squartini [93], wordt bevestigd. We bekijken de situatie van een toevallige graaf met een gegeven gradenrij (een configuratie model) en laten zien dat de formule correct voorspelt dat de specifieke relatieve entropie wordt bepaald door de schaling van de determinant van de covariantie matrix van de randcondities in het zogenaamde δ -tamme hogedichtheidregime, maar dat een extra correctieterm nodig is in het lagedichtheidregime en het ultrahogedichtheidsregime.

We laten zien dat het gedrag in de verschillende regimes correspondeert met het feit dat de graden asymptotisch Gaussisch zijn en asymptotisch Poisson in het lagedichtheidregime, en dat de duale graden asymptotisch Poisson zijn in het ultrahogedichtheidregime. We laten ook zien dat in het kanonieke ensemble de graden verdeeld zijn volgens een multivariate versie van de *Poisson-Binomiaal* verdeling [100], hetgeen een Gauss verdeling toelaat met de Poisson verdeling als de limiet in de corresponderende regimes.

We vervolgen onze studie van het configuratiemodel in hoofdstuk 4, waar een nieuwe vraag wordt beantwoord. Hoewel men kan laten zien dat extensiviteit van het aantal randcondities in het aantal knopen een cruciale rol speelt in het breken van ensemble equivalentie, is de vraag hoe het reduceren van het aantal beperkingen dit verschijnsel precies beïnvloedt nog open. In hoofdstuk 4 beantwoorden we deze vraag door het effect op de relatieve entropie van het reduceren van het aantal randcondities te bestuderen. We bekijken wat er gebeurt wanneer we slechts een deel van de knopen in hun graad beperken en de rest vrij laten.

Intuitief is de verwachting dat wanneer het aantal beperkingen afneemt de relatieve entropie ook afneemt. Dit is echter niet triviaal, omdat het aantal randcondities zowel het kanonieke als het microkanieke ensemble beïnvloedt. We bekijken toevallige grafen met een voorgeschreven partiële gradenrij (gereduceerde randconditie). Het breken van ensemble equivalentie wordt bestudeerd door te analyseren hoe de relatieve entropie verandert als een functie van het aantal randcondities. Meer precies laten we zien dat de relatieve entropie een monotone functie is van het aantal randcondities op *macroscopisch niveau*, d.w.z. wanneer een deel van de randcondities wordt weggelaten dat van de orde n is, met n het aantal knopen. Wanneer slecht m knopen zijn beperkt en de resterende $n - m$ knopen niet, dan groeit de relatieve entropie als $m \log n$ voor $n \rightarrow \infty$.

Hoofdstukken 5 en 6 sluiten dit proefschrift af met een studie van dichte grafen met randcondities op deelgraafstructuren. In hoofdstuk 5 wordt het breken van ensemble equivalentie geanalyseerd door randcondities op te leggen op het aantal zijden en het aantal deelgrafen zoals hoeken, driehoeken, etc. Hier gebruiken we een grote afwijkingen principe voor graphons om te laten zien dat het breken van ensemble equivalentie ontstaat zodra de randcondities gefrustreerd zijn, d.w.z. met elkaar in conflict. Hoofdstuk 6 is een vervolg op hoofdstuk 5 voor het geval waar de randcondities worden opgelegd op het aantal zijden en driehoeken tegelijkertijd. In het bijzonder worden de randcondities zo gekozen dat ze de zogenaamde Erdős-Rényi-lijn benaderen, maar daar niet gelijk aan zijn. Het blijkt dat het gedrag van de relatieve entropie sterk verschilt tussen de situatie waarbij het totale aantal driehoeken groter is dan de derde macht van het totaal aantal zijden en de omgekeerde situatie.