



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Positive representations of algebras of continuous functions

Jiang, X.

Citation

Jiang, X. (2018, September 25). *Positive representations of algebras of continuous functions*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/66030>

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/66030>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Cover Page



Universiteit Leiden



The handle <http://hdl.handle.net/1887/66030> holds various files of this Leiden University dissertation.

Author: Jiang, X.

Title: Positive representations of algebras of continuous functions

Issue Date: 2018-09-25

Samenvatting

Positieve representaties van algebra's van continue functies

Als X een lokaal compacte Hausdorffruimte is, dan wordt een representatie van de complexe C^* -algebra $C_0(X, \mathbb{C})$ op een Hilbertruimte $\mathcal{H}$ gegeven door een spectraalmaat die waarden aanneemt in de orthogonale projecties in $\mathcal{H}$. In een geordende context is het een natuurlijke vraag of iets vergelijkbaars geldt voor een positieve representatie van de algebra $C_0(X)$ (we nemen nu aan dat de functies reëelwaardig zijn) op een partieel geordende vectorruimte E , en meer in het bijzonder op een (reëel) Banachrooster E .

Het is uit eerder werk van De Jeu en Ruoff bekend dat er inderdaad een spectraalmaat bestaat voor een positieve representatie van $C_0(X)$ op E als E een KB-ruimte is. De KB-ruimten vormen een redelijk grote klasse van ruimten die bijvoorbeeld de reflexieve Banachroosters bevat. Het bewijs van dit resultaat vindt overwegend via een Banachruimtebenadering plaats, maar enkele van de resultaten die op deze manier verkregen worden wijzen erop dat er wellicht een veel grotere rol voor de ordening bestaat dan uit hun werk duidelijk wordt. De vraag rijst of het wellicht mogelijk is om hun resultaat primair vanuit een ordetheoretische invalshoek te bewijzen.

Deze vraag wordt onderzocht in het eerste gedeelte van dit proefschrift, en het antwoord is bevestigend. Tijdens het ontwikkelen van de benodigde theorie verkrijgen we meer dan een alternatief bewijs voor een reeds bestaand resultaat in de specifieke context van KB-ruimten. Naar blijkt is er een abstracte spectraalstelling die ten grondslag ligt aan zowel het klassieke resultaat voor spectraalmaten in de context van Hilbertruimten als dat in de context van KB-ruimten.

Onze benadering van deze onderliggende stelling is verdeeld in drie stappen, die ieder verscheidene secties beslaan.

Stap een draagt een voorbereidend karakter. We behandelen een aantal resultaten over partieel geordende vectorruimten, met speciale aandacht voor partieel geordende vectorruimten die normaal zijn. Een partieel geordende vectorruimte E is normaal als, voor $x \in E$, het feit dat $(x, x') \geq 0$ voor alle positieve ordecontinue lineaire functionalen op E impliceert dat $x \geq 0$. Zoals later duidelijk zal worden vormen de (monotoon volledige) normale ruimten een klasse van ruimten in de context waarvan Riesz representatiestellingen bewezen kunnen worden.

De formulering van deze representatiestellingen is in termen van maten met waarden in partieel geordende vectorruimten en van integralen van reëelwaardige functies met betrekking tot dergelijke maten. Het materiaal dat in deze eerste stap ontwikkeld wordt verschaft ook het begrippenkader dat nodig is om deze resultaten te kunnen formuleren. We introduceren σ -additieve maten met waarden in σ -monotoon volledige partieel geordende vectorruimten, evenals (orde-)integralen met betrekking tot dergelijke maten. We bewijzen

ook de monotone convergentiestelling, het lemma van Fatou en de gedomineerde convergentiestelling. Dit alles resulteert in de gebruikelijke Lebesguetheorie als de partieel geordende vectorruimten die van de reële getallen is.

Eveneens als een voorbereiding op wat later komt, nemen we ook materiaal op over maten met waarden in partieel geordende algebras, en over vectorwaardige maten op de Borel σ -algebra van een lokaal compacte Hausdorffruimte die zekere regulariteitseigenschappen hebben.

Stap twee heeft betrekking op Riesz representatiestellingen die generalisaties zijn van de klassieke resultaten. We beginnen met stellingen voor een positieve lineaire afbeelding T van $C_c(X)$ naar een partieel geordende vectorruimte E . Hiervoor worden verscheidenen representatiestellingen bewezen. Bijvoorbeeld, wanneer $T : C_c(X) \rightarrow E$ een positieve lineaire afbeelding is van $C_c(X)$ naar een normale en monotoon volledige partieel geordende vectorruimte E , dan—we gaan eenvoudigheidshalve voorbij aan de regulariteit en uniciteit—bestaat er een maat m op de Borel σ -algebra van X , met waarden in de uitgebreide positieve kegel van E , zodanig dat

$$T(f) = \int_X^o f \, dm$$

voor alle $f \in C_c(X)$. Het superscript 'o' in de notatie van de integraal dient om aan te geven dat het hier een orde-integraal betreft.

Hierna gaan we over op het geval van een positieve lineaire afbeelding $T : C_0(X) \rightarrow E$ die gedefinieerd is op de grotere ruimte $C_0(X)$. Wanneer de maat die de restrictie van T tot $C_c(X)$ representeert een eindige maat is, dat wil zeggen als $\{T(f) : f \in C_c(X), 0 \leq f \leq 1\}$ naar boven begrensd is in E , dan zal deze maat vaak ook de afbeelding T op de gehele ruimte $C_0(X)$ representeren. Gebruikmakend van het feit dat positieve lineaire afbeeldingen van het Banachrooster $C_0(X)$ naar genormeerde Rieszruimten automatisch normcontinu zijn, kunnen we een aantal gevallen identificeren waarin deze begrensdheid automatisch is, zoals wanneer E de partieel geordende vectorruimte is van reguliere operatoren op een KB-ruimte. Op deze manier wordt een aantal representatiestellingen voor de afbeelding T , zoals gedefinieerd op de hele ruimte $C_0(X)$, verkregen.

Stap drie bestaat uit de bestudering van een positief algebrahomomorfisme π van $C_c(X)$ of $C_0(X)$ naar een partieel geordende algebra $\mathcal{A}$. Wanneer $\mathcal{A}$ normaal en monotoon volledig is als partieel geordende vectorruimte, dan geven de resultaten uit de vorige stap een maat die π als positieve lineaire afbeelding representeert. In dit geval weten we iets meer, namelijk dat de afbeelding π ook multiplicatief is. Wanneer de vermenigvuldiging in $\mathcal{A}$ monotone ordecontinu is, dan kan er bewezen worden dat, indien hij eindig is, de representerende maat P (we gaan hier over op de gebruikelijke notatie) voor π ook nog spectraal is, dat wil zeggen dat $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$ for all Borel sets A_1 and A_2 . Op deze manier wordt een abstracte spectraalstelling verkregen voor positieve algebra homomorfismen van $C_c(X)$ naar partieel geordende algebra's. De spectraalmaat P neemt dan waarden in de positieve idempotenten van $\mathcal{A}$.

Net als in het geval van een positieve lineaire afbeelding van $C_0(X)$ naar een partieel geordende vectorruimte, is ook hier de maat die de restrictie tot $C_c(X)$ van een positief algebra homomorfisme van $C_0(X)$ naar $\mathcal{A}$ representeert vaak automatisch eindig, in welk geval het een spectraalmaat is die π op de gehele algebra $C_0(X)$ representeert.

Aan het einde van deze stap merken we op dat de algebra van reguliere operatoren op een KB-ruimten in dit beeld past, net als de algebra van de zelfgeadjungeerde elementen van een commutatieve von Neumannalgebra. De abstracte spectraalstelling blijkt dan de

existentie van de spectraalmaat in de twee voorbeelden in het begin van deze samenvatting als onmiddellijk gevolg te hebben.

Er bestaat eerder werk, met name van J.D.M. Wright, over integratie met betrekking tot maten met waarden in partieel geordende vectorruimten, en over Riesz representatiestellingen die geformuleerd worden met behulp van de corresponderende orde-integralen. Er is een discussie van de relatie tussen het huidige werk en dat in de literatuur opgenomen.

Simultane machtsontbinding

Veronderstel dat A een Banachalgebra is met een begrensde linksbenadering van de identiteit $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, dat π een continue representatie van A op een Banachruimte X is, en dat S een niet-lege deelverzameling van X is zodanig dat $\lim_\lambda \pi(e_\lambda)s = s$ uniform op S . Indien S begrensd is, of indien $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ commutatief is, dan tonen we aan dat er een a in A bestaat en dat er afbeeldingen $x_n : S \rightarrow X$ voor $n \geq 1$ zijn, zodanig dat $s = \pi(a^n)x_n(s)$ voor alle $n \geq 1$ en $s \in S$. De eigenschappen van het element a van A en van de afbeeldingen x_n , zoals die uit het bewijs volgen, worden in enige mate van detail bestudeerd. De resultaten veralgemeniseren niet alleen voorgaande simultane ontbindingsstellingen, maar ook de machtsontbindingsstelling van Allan en Sinclair.

In een geordende context bestuderen we ook het bestaan van een positieve ontbinding van een deelverzameling van een geordende Banachruimte die een positief moduul is over een geordende Banachalgebra met een positieve linksbenadering van de identiteit. Dergelijke ontbindingen zijn niet altijd mogelijk. In bepaalde gevallen, inclusief die van positieve modulen over geordende Banachalgebra's van functies, bestaan dergelijke positieve ontbindingen wel, maar het algemene beeld is nog niet duidelijk.

Verder worden simultane puntsgewijze machtsontbindingen voor verzamelingen van begrensde afbeeldingen met waarden in een Banachmoduul (zoals verzamelingen van begrensde convergente netten) verkregen.

Er is een uitgewerkt voorbeeld voor de linksreguliere representatie van $C_0(\mathbb{R})$ en een onbegrensde deelverzameling S opgenomen.

