

SAMENVATTING

Formules schetsen om
symbol sense te bevorderen.

Vriendschap sluiten met
algebraïsche formules.

Leerlingen in het voortgezet onderwijs en zelfs daarna hebben nog steeds ernstige problemen met algebra, met name om betekenis te geven aan algebraïsche formules die voor hen zeer abstract zijn (bijv. Kieran, 2006). Veel leerlingen hebben weinig symbol sense, dat wil zeggen, dat ze moeite hebben met het doorzien van formules, het herkennen van de structuur van formules en het betekenis geven aan deze formules. In veel curricula wordt het belang hiervan erkend (bijv. NCTM, 2000). Het belangrijkste doel van ons onderzoek was het bevorderen van deze aspecten van de symbol sense die het studenten in staat stellen algebraïsche formules te doorzien en niet-standaard algebra problemen aan te pakken.

In het eerste hoofdstuk gaan we dieper in op het begrip symbol sense, beschrijven we onze strategie om deze symbol sense te onderwijzen aan leerlingen in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs en geven we een overzicht van de verschillende studies. Symbol sense is een zeer breed begrip, dat door Arcavi werd beschreven als "een intuïtief gevoel voor wanneer en hoe wiskundige symbolen te gebruiken in het proces van het oplossen van een wiskundig probleem, en omgekeerd, wanneer een symbolische aanpak te stoppen en over te gaan op een andere aanpak" (Arcavi, 1994, p. 25). Drijvers et al. (2011) zien symbol sense als complementair aan basisvaardigheden, als procedureel werken en algebraïsch manipuleren. Zij zien symbol sense als een kompas voor de basisvaardigheden en daarbij gaat het om globaal kijken, algebraïsch redeneren, en strategisch werken. Pierce en Stacey (2004) gebruiken het begrip 'algebraic insight' voor het interpreteren en betekenis geven aan algebraïsche berekeningen die via computer algebra systemen zijn uitgevoerd. Hierbij speelt het bepalen van gelijkwaardigheid van formules en dus ook het manipuleren van formules een belangrijke rol. Aangezien onze focus lag op het doorzien van en betekenis geven aan algebraïsche formules en niet op het manipuleren van formules, gebruikten we de term inzicht in algebraïsche formules, gedefinieerd als het vermogen om de structuur van een formule en zijn componenten te herkennen, en te redeneren met en over formules.

Om betekenis te geven aan algebraïsche formules hebben Kieran (2006) en Radford (2004) gesuggereerd om gebruik te maken van meervoudige representaties van functies, zoals tabel, grafiek, formule en realistische context. Met uitzondering van lineaire en exponentiële formules is het koppelen van formules aan realistische contexten over het algemeen echter moeilijk. Voor ons onderzoek hebben we ervoor gekozen om formules te koppelen aan grafieken. In de literatuur wordt geadviseerd om gebruik te maken van technologie bij het leren over wiskundige functies waardoor formules eenvoudig omgezet kunnen worden in grafieken (Hennessy et al., 2001; Heid et al., 2013). Echter, Goldenberg (1988) suggereerde

dat studenten het verband tussen formules en grafiek beter legden als grafieken met de hand getekend werden. De noodzaak van pen-en-papier activiteiten, naast het gebruik van technologie, werd later door anderen onderschreven (Kieran & Drijvers, 2006; Arcavi et al., 2017). Omdat leerlingen in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs ervaring hebben met de grafische rekenmachine, hebben we de suggestie van Goldenberg gevolgd en gekozen om grafieken te laten schetsen met de hand, dus zonder technologie (schetsen van formules). Bij het schetsen van formules worden formules gekoppeld aan grafieken, die een Gestalt-view van een functie geven en het ‘verhaal’ dat een functie vertelt in een enkel beeld visualiseren. Grafieken benadrukken het object-karakter van een functie en laat de co-variantie van een functie zien, dat wil zeggen hoe de afhankelijke en onafhankelijke variabelen veranderen ten opzichte van elkaar. Op deze manier komen verschillende aspecten die problematisch lijken bij het leren over functies en formules aan bod: wiskundige objecten zoals functies zijn niet direct toegankelijk als fysieke objecten, het schakelen tussen het proces en object karakter van een functie, dat is een functie zien als een input-output machine en als een object (Moschkovich et al., 1993), en redeneren over de co-variantie van een functie (Carlson et al., 2002).

Om bekwaam te worden in algebra is een combinatie van basisvaardigheden en symbol sense nodig. Het is echter niet simpel om deze symbol sense te onderwijzen (Arcavi et al., 2017; Hoch & Dreyfus, 2005). In dit proefschrift hebben we geprobeerd het inzicht in formules bij leerlingen te bevorderen en hebben we ervoor gekozen om hiervoor het schetsen van formules te gebruiken. De algemene onderzoeksvraag in dit proefschrift was:

Hoe kan onderwijs in het schetsen van formules het inzicht van leerlingen in formules en hun symbol sense om niet-standaard algebraïsche problemen op te lossen bevorderen?

We hebben vier studies uitgevoerd om deze algemene onderzoeksvraag te kunnen beantwoorden. Omdat het niet duidelijk was welke kennis en vaardigheden nodig zijn om formules effectief en efficiënt te kunnen schetsen, hebben we in studie 1 en 2 (hoofdstukken 2 en 3) eerst het gedrag en denken van experts in bij het schetsen van grafieken onderzocht. De bevindingen resulteerden in een framework dat voor de interventie in studie 3 gebruikt werd. In studie 3 (hoofdstuk 4) ontwierpen we een interventie om leerlingen in VWO 5 het schetsen van formules door middel van een combinatie van herkenning en kwalitatief redeneren te onderwijzen, en we onderzochten of het inzicht van leerlingen in algebraïsche formules verbeterde. In studie 4 (hoofdstuk 5) richtten we ons op de relatie tussen de symbol

sense van leerlingen bij het schetsen van formules en bij het oplossen van niet-standaard algebra problemen.

In hoofdstuk 2 beschrijven we het onderzoek naar de strategieën van experts bij het schetsen van formules. Uit de literatuur blijkt dat het oplossen van problemen beschreven kan worden in termen van herkenning en heuristisch zoeken (Chi, 2011; Gobet, 1998; Gobet & Simon, 1996). Om de strategieën van experts bij het schetsen van formules te beschrijven is een tweedimensionaal framework gepresenteerd, met niveaus van herkenning en heuristieken. De niveaus van herkenning kunnen gelinkt worden aan Mason's niveaus van 'awareness' (Mason, 2003) en variëren van volledige herkenning en het direct kennen van de grafiek, tot het ontleiden van de formule in hanteerbare sub formules, tot het herkennen van enkele grafische eigenschappen, tot het ontbreken van enige herkenning. Op verschillende niveaus van herkenning worden in het framework domein specifieke heuristieken beschreven die geordend zijn van sterk naar zwak. Sterke heuristieken geven informatie over grote delen van een grafiek, zoals het gebruik van kwalitatief redeneren over het oneindig gedrag van een functie of bij het optellen en vermenigvuldigen van twee sub grafieken. Zwakke heuristieken geven alleen lokale informatie over de grafiek, zoals bij het berekenen van een punt van de grafiek. In hoofdstuk 2 staan twee onderzoeksvragen centraal: Beschrijft het framework de strategieën van experts bij het schetsen van formules adequaat en discriminerend? Welke strategieën gebruiken de experts bij het schetsen van formules?

In deze casestudie participeerden vijf experts, wiskundigen die betrokken zijn bij universitair wiskundeonderwijs, nationale examens, en/of schoolboeken, en drie wiskundedocenten uit het voortgezet onderwijs, die allen met hardop denken de grafiek van een complexere functie ($y = 2x\sqrt{8-x} - 2x$) moesten schetsen en een formule vinden die bij een gegeven grafiek zou kunnen passen. De video-opnamen werden getranscribeerd, opgedeeld in fragmenten die cruciale stappen van de uitleg bevatten en geanalyseerd. De resultaten toonden dat al deze stappen konden worden gecodeerd binnen het tweedimensionale framework. Zo ontstonden paden in het framework die het oplossingsproces beschreven. We concludeerden dat het framework discriminerend was, omdat verschillende strategieën van de deelnemers resulteerden in verschillende paden in het framework. De experts gebruikten verschillende strategieën bij het schetsen van de formule: sommigen richtten zich op hun repertoire van formules die ze direct konden visualiseren door middel van een grafiek; anderen vertrouwden op sterke heuristieken, zoals kwalitatief redeneren. De belangrijkste expert strategieën waren: het herkennen van functie families en

het gebruik van hun prototypische grafieken, het herkennen van belangrijke kenmerken van de grafiek, het gebruik van kwalitatief redeneren bij het exploreren van delen van de grafiek, bijvoorbeeld bij het oneindig gedrag of bij het samenstellen van twee sub grafieken nadat de formule ontleed was in twee sub-formules. De docenten maakten nauwelijks gebruik van functie families en gebruikten vaker zwakkere heuristieken. Geconcludeerd werd dat expertise in het schetsen van formules niet gerelateerd kon worden aan het berekenen van afgeleiden, omdat al onze experts leken te aarzelen om dergelijke berekeningen te starten en ook fouten maakten toen ze dat probeerden.

In hoofdstuk 3 rapporteren we over het onderzoek naar de herkeningsprocessen van experts bij het schetsen van formules. In hoofdstuk 2 vonden we dat een van de expert strategieën was ‘het herkennen van een functie familie, gevolgd door het gebruik van een prototypische grafiek’. In dit hoofdstuk richtten we ons op deze direct schetsbare formules (IGF, instant graphable formulas). Een IGF is een formule die door een persoon direct gevisualiseerd kan worden door een grafiek. IGF's kunnen gezien worden als bouwstenen in het denken en redeneren met en over formules en grafieken. Deze bouwstenen kunnen worden gecombineerd (optellen, vermenigvuldigen, koppelen, enz.) tot nieuwe en meer complexe bouwstenen (bijvoorbeeld $y = -x^4$ en $y = 6x^2$ kunnen worden gecombineerd tot een 4^e graads polynoomfunctie $y = -x^4 + 6x^2$). De onderzoeksvragen in dit hoofdstuk waren: Kunnen we het repertoire van IGF's van experts beschrijven met behulp van categorieën van functie families? Waar letten experts op bij het koppelen van formules aan grafieken van IGF's, beschreven in termen van prototypes en kenmerken? De vijf experts van hoofdstuk 2 werkten aan een kaart-sorteertaak om te onderzoeken welke functie families de experts gebruiken, aan een matching taak om de herkenning te onderzoeken, en aan een meerkeuzetaak, met hardop denken, om de herkeningsprocessen van experts in beeld te brengen. De resultaten van de experts in de kaart-sorteringstaak toonden dat de categorieën die ze construeerden, en de categoriebeschrijvingen, sterk op elkaar leken, hoewel sommige experts meer subcategorieën maakten (bijv. verschillen tussen bergparabolen en dalparabolen). Deze categorieën waren nauw verwant aan de basisfunctie families die in het voortgezet onderwijs worden onderwezen: lineaire functies, polynoomfuncties, exponentiële functies, logaritmische functies, gebroken functies, en machtsfuncties. De experts hadden geen problemen met de matching taak, waarbij ze formules moesten koppelen aan één van de 21 alternatieve grafieken.

De analyses van de hardop denkprotocollen van de meerkeuzetaak waren gebaseerd op zowel Barsalou's model van hiërarchische georganiseerde kennis (Barselou, 1992) als op Schwarz en Herschkowitz (1999) beschrijvingen van concept images met behulp van prototypen van functie families, het herkennen van kenmerken van een functie over verschillende representaties heen, en het herkennen dat verschillende formules en/of verschillende grafieken betrekking hebben op dezelfde functie. De analyses suggereerden dat de herkenning van IGF's door experts kan worden beschreven met het Barselou-model waarin formules, functie families, prototypes, een set van kenmerken, en grafieken in rijke hiërarchische netwerken met elkaar verbonden zijn.

In hoofdstuk 4 wordt onderzocht hoe het schetsen van formules met herkennen en redeneren kan worden onderwezen met als doel het inzicht van studenten in algebraïsche formules te bevorderen. De onderzoeksvraag was: Hoe kan het inzicht in algebraïsche formules van VWO 5 leerlingen door middel van het schetsen van formules worden bevorderd? In een interventie van vijf lessen van 90 minuten werden 21 VWO 5 leerlingen onderwezen in het schetsen van formules met de hand. Het ontwerp van de interventie was gebaseerd op de expert strategieën, dat wil zeggen, op basis van een combinatie van herkennen en kwalitatief redeneren. We gebruikten de principes van het onderwijzen van complexe vaardigheden, zijnde het gebruik van een hele taak benadering, met ondersteuning en reflectie (Kirschner & Van Merriënboer, 2008; Merrill, 2013; Van Merriënboer et al., 2002). Daarnaast werd ook de meta-heuristiek 'bevragen van de formule' gebruikt (Landa, 1983; Pierce & Stacey, 2007). De interventie bestond uit vijf hele taken die overeenkwamen met de niveaus van herkenning van het tweedimensionale framework. Als eerste werd aandacht besteed aan een repertoire van basisfunctie families met hun kenmerken. Vervolgens kwamen de transformaties van prototypes van de functie families aan bod. In de derde hele taak kwam het ontleden van een formule in twee sub formules en het samenstellen van de sub grafieken aan bod. In de vierde hele taak lag de focus op het herkennen van grafische kenmerken, zoals het aflezen van nulpunten en extreme waarden uit een formule. In de laatste hele taak oefenden de leerlingen expliciet het kwalitatief redeneren over oneindig gedrag, zwakkere en sterkere componenten van een formule, stijgende en dalende functies, enz. Kwalitatief redeneren wordt vaak gebruikt door experts en wordt gekenmerkt door een focus op de globale vorm van de grafiek, globale beschrijvingen, en het negeren van wat niet relevant is in de probleemsituatie.

De leerlingen maakten een schriftelijke pre-, post-test, en na vier maanden een retentietest. Alle testen bevatten een taak waarin formules geschetst moesten worden en een matching taak, die vergelijkbaar was met de taak uit hoofdstuk 3. Zes leerlingen werd gevraagd om tijdens de schetsen van formules in de pre- en posttest hardop te denken. Uit de resultaten van de pre-test bleek dat de leerlingen weinig inzicht hadden in de formules, en de hardop denkprotocollen suggereerden een gebrek aan herkennen en redeneren. De resultaten van de post-test toonden aan dat de leerlingen hun herkenning van functie families en kenmerken en hun kwalitatief redeneren verbeterd hadden. In een vragenlijst na de post-test gaven de leerlingen zelf aan dat ze algebraïsche formules beter waren gaan begrijpen. In de retentietest waren de scores op de taak met formule schetsen en de op matching taak, zoals verwacht, lager dan in de post-test, maar nog wel significant hoger dan in de pre-test. Dit suggereerde een langdurig effect van de interventie. De bevindingen van dit onderzoek suggereerden dat, hoewel veel leerlingen nog steeds problemen hadden met complexere formules, het onderwijzen van het schetsen van formules via herkennen en kwalitatief redeneren, een middel zou kunnen zijn om het inzicht in algebraïsche formules van VWO 5 leerlingen op een systematische manier te bevorderen.

Hoofdstuk 5 beschrijft het onderzoek naar de relatie tussen de vaardigheden van leerlingen in het schetsen van formules en het gebruik van symbol sense bij het oplossen van niet-standaard algebra problemen, zoals: Hoeveel oplossingen heeft deze vergelijking? Welke y -waarden kan deze formule hebben? Om dit soort problemen op te lossen zouden leerlingen hun vaardigheden in het schetsen van formules kunnen gebruiken, maar ook andere aspecten van de symbol sense, zoals het opgeven van de symbolische representatie en, in plaats van te starten met berekeningen, grafieken en/of redeneringen gebruiken. Dus, symbol sense die bij het schetsen van formules gebruikt kan worden is een deelverzameling van symbol sense die bij het oplossen van niet-standaard algebra problemen gebruikt kan worden. We hebben onderzocht of leerlingen de symbol sense die ze gebruikten bij het schetsen van formules ook bij andere niet-standaard algebra problemen gebruikten. De hoofdonderzoeksvraag in hoofdstuk 5 was: Wat is de relatie tussen de vaardigheden van VWO 6 leerlingen om formules te schetsen en hun gebruik van symbol sense bij het oplossen van niet-standaard algebra taken? Er werden twee deelvragen geformuleerd: In welke mate zijn de vaardigheden van leerlingen om formules te schetsen positief gecorreleerd met hun vaardigheden om algebra taken met symbol sense op te lossen? En: Is de symbol sense die leerlingen gebruiken bij het schetsen van formules vergelijkbaar met of verschillend van hun symbol sense gebruik

bij het oplossen van niet-standaard algebra taken? Een groep van 114 VWO 6 leerlingen, waaronder 21 leerlingen die hadden deelgenomen aan de interventie zoals beschreven in hoofdstuk 4 en 93 leerlingen van vijf andere scholen verspreid over Nederland, maakten een schriftelijke symbol sense test. Dezelfde zes studenten die betrokken waren bij de interventie, werden gevraagd om hardop te denken tijdens deze symbol sense test, die bestond uit 8 schets taken en 12 niet-standaard algebra taken. De resultaten van de schriftelijke test werden gescoord en het symbol sense gebruik werd geanalyseerd en gescoord aan de hand van vier categorieën: blanco, berekeningen, het maken van een grafiek, herkennen en redeneren.

Er werden positieve correlaties gevonden tussen de vaardigheden van de leerlingen om formules te schetsen en hun vaardigheden om de algebra taken op te lossen, en ook met hun gebruik van symbol sense bij het oplossen van deze taken. Ook wanneer gecorrigeerd werd voor de algemene wiskundige vaardigheden van de leerlingen veranderden deze correlaties nauwelijks. Leerlingen die hoog scoorden op het schetsen van grafieken maakten vaker gebruik van de strategie ‘een grafiek maken’ bij het werken aan de algebra taken. Met betrekking tot de tweede sub vraag vonden we dat 16 van de 21 leerlingen die waren betrokken bij de interventie uit hoofdstuk 4, behoorden tot de 25% hoogst scorende leerlingen op de formule-schets-taken. Deze hoog scorende leerlingen gebruikten meer symbol sense bij het oplossen van de niet-standaard algebra taken dan de andere studenten. De zes leerlingen die hardop dachten behoorden allen tot de groep van 25% hoogst scorende leerlingen. Zij gebruikten vergelijkbare aspecten van symbol sense bij zowel het schetsen van formules als bij het oplossen van niet-standaard algebra taken, zoals het herkennen van functie families en kenmerken, en kwalitatief redeneren. Deze bevindingen bevestigden onze verwachtingen dat leerlingen die in staat zijn om formules te schetsen, deze vaardigheden kunnen gebruiken in een breder domein van niet-standaard algebra taken.

In het afsluitende hoofdstuk 6 presenteren we eerst de bevindingen van de vier afzonderlijke studies, gevolgd door discussie en conclusies met de belangrijkste bijdragen en beperkingen van de studie. Het belangrijkste doel van dit onderzoek was het bevorderen van aspecten van de symbol sense van leerlingen, dat wil zeggen het vermogen van leerlingen om formules te doorzien, betekenis te kunnen geven aan formules, en deze symbol sense te gebruiken bij het oplossen van algebra problemen. Het uitgangspunt van ons onderzoek was dat leerlingen betekenis moeten kunnen geven aan algebraïsche formules en dat ze daarom deze formules moeten kunnen doorzien. Immers, als leerlingen geen betekenis kunnen geven aan algebra dan zullen ze geen vertrouwen ontwikkelen in hun algebraïsche werk, hetgeen

zou kunnen leiden tot een terughoudendheid in het algebraïsch redeneren en denken. Om expertise en vertrouwen in het lezen van algebraïsche formules te laten ontwikkelen, hebben we gekozen voor een klein maar rijk domein in algebra, namelijk de schetsen van formules. Het schetsen van formules vereist dat leerlingen vele formules moeten kunnen doorzien en stelt ze in staat om betekenis te geven aan deze formules door ze te koppelen aan een grafiek. Omdat we het inzicht in formules wilden bevorderen, hebben we ons beperkt tot het interpreteren van formules en zijn we voorbijgegaan aan algebraïsche manipulaties, die vaak de kern vormen van het reguliere algebra-onderwijs en een bron van problemen is voor veel studenten. We kozen ervoor om formules met de hand te schetsen, omdat het koppelen van een formule aan een grafiek met de hand effectiever lijkt dan via technologie. Experts worden verondersteld inzicht in formules te hebben en daarom onderzochten we hoe experts formules schetsen. We identificeerden essentiële denkprocessen van experts en beschreven deze met een tweedimensionaal framework in termen van herkennen en redeneren. Dit gaf ons aanwijzingen over wat te onderwijzen aan leerlingen. Op basis van het tweedimensionale framework ontwierpen we een interventie van vijf lessen van 90 minuten, het zogenaamde GQR-ontwerp (Graphing based on Qualitative reasoning and Recognition). Door middel van hele taken, met ondersteuning via hulpvragen en met reflectievragen, en met behulp van ‘het bevragen van de formule’ als een leidende meta-heuristiek, werd het schetsen van formules stap voor stap en op een systematische manier onderwezen. In dit GQR-ontwerp wordt expliciet aandacht besteed aan het samenspel tussen herkennen en redeneren via het gebruik van functie families met hun prototypische grafieken als bouwstenen, kenmerken van formules en kwalitatief redeneren. De hele taakbenadering stimuleert leerlingen tot globaal kijken ten behoeve van herkenning, tot redeneren en argumenteren, en tot het overwegen van hun strategieën, hetgeen essentiële aspecten van symbol sense zijn (Drijvers et al., 2011). We verwachtten dat de leerlingen deze aspecten van symbol sense ook konden gebruiken in andere situaties zoals bij het oplossen van niet-standaard algebra problemen. Daarvoor ontwierpen we een symbol sense test met grafiek-schets-taken en niet-standaard algebra taken, die konden worden opgelost met herkennen, redeneren en het maken van een grafiek. De resultaten van deze symbol sense test suggereerden dat de leerlingen die betrokken waren bij de interventie in staat waren om hun symbol sense geleerd bij het schetsen van formules konden gebruiken bij het oplossen van de algebra taken. We concludeerden dat het schetsen van formules onderwezen met ons GQR-ontwerp een effectief middel zou kunnen zijn om leerlingen in de hogere klassen van voortgezet onderwijs aspecten van symbol sense te leren,

zoals inzicht in algebraïsche formules en kwalitatief redeneren, die gebruikt kunnen worden om niet-standaard algebra taken op te lossen.

De gerapporteerde studies hebben onvermijdelijk hun beperkingen. In de hoofdstukken 2 en 3 namen slechts vijf experts deel en werkten ze slechts aan twee taken, vanwege de arbeidsintensieve onderzoeksmethode. Hoewel we verwachten dat de meeste strategieën in het tweedimensionale framework zijn vastgelegd, zou het testen van een grotere groep potentiële experts een ander, gedetailleerder beeld van expertise kunnen geven. Bij de interventie in hoofdstuk 4 was slechts één klas Nederlandse leerlingen betrokken en was er geen controlegroep. Een jaar later en twee jaar later werd echter dezelfde reeks lessen uit de interventie gebruikt in twee andere klassen van dezelfde school, beide met 23 leerlingen. Beide groepen maakten dezelfde post-test die in hoofdstuk 4 werd gebruikt, en de scores lieten vergelijkbare resultaten zien. Hoewel dit een bevestiging kan zijn dat leerlingen inzicht in formules kunnen ontwikkelen via ons GQR-ontwerp, zouden in de toekomst meer leerlingen en docenten betrokken kunnen worden bij verder onderzoek naar het GQR-ontwerp.

In de symbol sense test in hoofdstuk 5 hebben we een combinatie van taken met het schetsen van formules en algebra taken gebruikt voor onderzoeksdoeleinden. Dit zou leerlingen de suggestie hebben kunnen geven om bij het werken aan de algebra taken gebruik te maken van de strategie 'het maken van een grafiek'. In de symbol sense test gebruikten we vaak de variabelen x en y om de test herkenbaar te maken voor leerlingen. In toekomstige onderzoeken stellen we voor om vaker andere variabelen dan x en y te gebruiken. De algebra taken in de huidige test waren beperkt tot de taken die met behulp van grafieken en redeneringen konden worden opgelost. In toekomstige testen zouden ook andere algebra problemen kunnen bevatten. Algebra problemen vereisen vaak een combinatie van redeneringen, grafieken en berekeningen, en een volgende stap zou kunnen zijn om ook taken op te nemen waarin men moet overwegen of berekeningen nodig zijn of niet, zoals bij 'hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $3.6(1 - e^{-2.5t}) = 10t$?' In de symbol sense test vonden we dat veel leerlingen problemen hadden met het oplossen van ongelijkheden zoals $x(x - 1) > 4x$. In plaats van hun vaardigheden in het schetsen van formules te gebruiken, begon de helft van de groep van 25% hoogst scorende leerlingen bij de formule-schets-taken te rekenen, hetgeen vrijwel nooit succesvol was. De bevindingen bij het hardop denken leken te suggereren dat een ongelijkheid eerder geleerde associaties oproept, en dat dergelijke associaties later geleerde symbol sense in de weg zouden kunnen staan. Verder onderzoek is

nodig om te onderzoeken hoe net geleerde symbol sense kan worden opgenomen in de strategieën en gewoontes van de studenten om met algebra problemen om te gaan. In hoofdstuk 5 suggereerden we dat het schetsen van formules op basis van herkennen en redeneren een middel zouden kunnen zijn om symbol sense te onderwijzen in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs, en dat deze symbol sense gebruikt zou kunnen worden om niet-standaard algebra taken op te lossen. Meer onderzoek is nodig om deze suggestie te onderbouwen. Een volgende stap zou kunnen zijn om een quasi-experimentele studie met controlegroep en met een pre- en post-test op te zetten, waarbij een groep leerlingen wordt onderwezen om formules te schetsen, zoals in de interventie. Omdat we verwachten dat de problematiek met inzicht in algebraïsche formules en symbol sense niet exclusief is voor Nederlandse leerlingen, zouden ook leerlingen en docenten uit andere landen in toekomstige studies moeten worden opgenomen.

Dit proefschrift draagt bij aan onze kennis over symbol sense en het onderwijzen van symbol sense. Ten eerste beschrijft het de aard van de expertise in termen van een samenspel tussen herkennen en redeneren, en het laat zien hoe dit kan worden uitgewerkt voor het domein van het schetsen van formules. Ten tweede laat het zien hoe leerlingen in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs inzicht in algebraïsche formules kunnen krijgen door middel van een innovatieve lessenserie over het schetsen van formules. En ten derde wordt onderzocht hoe symbol sense om niet-standaard algebra problemen op te lossen onderwezen kan worden.

De eerste bijdrage van dit onderzoek is de beschrijving van de aard van expertise in het schetsen van formules met een tweedimensionaal framework in termen van herkennen en heuristieken. We identificeerden verschillende niveaus van herkenning die de probleemruimte en dus het heuristisch zoeken bepalen: de herkenning stuurt de heuristische zoektocht. Op verschillende niveaus van herkenning hebben we in het tweedimensionale framework heuristieken geformuleerd, waarbij we de nadruk legden op het samenspel tussen herkennen en domein specifieke heuristieken. Deze benadering wijkt af van bijvoorbeeld beschrijvingen van kennisbases, waarin wiskundige competenties worden beschreven in lijsten met verschillende componenten, zoals conceptuele kennis, procedurele kennis en strategische competentie. Hoewel de noodzaak van integratie van verschillende componenten vaak is benadrukt (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001), heeft dit, bij ons weten, niet geleid tot modellen waarin deze componenten daadwerkelijk zijn geïntegreerd. Het beschrijven van expertise in termen van herkennen en heuristieken in een tweedimensionaal framework, lijkt

ook mogelijk in andere domeinen van algebra. Pouwelse, Janssen en Kop (ingediend voor publicatie) stelden een vergelijkbaar framework op voor het vinden van onbepaalde integralen in calculus. Een dergelijk framework kan gebruikt worden als instrument voor het ontwerpen van lesmateriaal, maar ook als instrument in de professionele ontwikkeling van docenten. Verder onderzoek is nodig om te onderzoeken hoe het samenspel tussen herkennen en domein specifieke heuristieken in andere domeinen zoals het oplossen van vergelijkingen kan worden beschreven en gebruikt bij het ontwerpen van onderwijs en/of bij de professionele ontwikkeling van docenten.

Als tweede bijdrage van het onderzoek hebben we laten zien hoe leerlingen in de bovenbouw inzicht kunnen krijgen in algebraïsche formules door middel van het schetsen van formules via ons GQR-ontwerp. Het GQR-ontwerp verschilt van zowel de reguliere als van andere innovatieve benaderingen van het onderwijzen over functies, met name wat betreft de koppeling tussen formules en grafieken. Het reguliere onderwijs over functies richt zich vaak op het manipuleren van algebraïsche expressies (Arcavi et al., 2017; Schwartz & Yerushalmy, 1992) en op het gebruik van technologie, zoals de grafische rekenmachine, om functie families te verkennen en om een ‘plaatje’ te maken van een functie. In vergelijking met reguliere benaderingen wordt in het GQR-ontwerp expliciet aandacht besteed aan herkennen en aan redeneren met en over functies. In ons ontwerp gebruiken we basisfunctie families als bouwstenen voor formules, in navolging van Davis' suggestie om grotere denkeenheden te gebruiken om de structuur van de formule beter te kunnen herkennen (Davis, 1983), en we besteden aandacht aan het aflezen van belangrijke kenmerken uit de formules. Bovendien wordt er expliciet aandacht besteed aan het redeneren, bijvoorbeeld over parameters van functie families, over oneindig gedrag, en bij het optellen en vermenigvuldigen van twee sub grafieken. Andere innovatieve benaderingen richten zich vaak op het redeneren over functies met behulp van technologie. In vergelijking met onze aanpak besteden deze benaderingen geen expliciete aandacht aan kwalitatief redeneren en aan het herkennen en gebruiken van functie families. Het belang van kwalitatief redeneren en het ontbreken daarvan in de wiskundecurricula werd al gesignaleerd door Leinhardt et al. (1990), Goldenberg et al. (1992), Yerushalmy (1997), en Duval (2006), maar voor zover wij weten is dit kwalitatief redeneren nog nooit geïmplementeerd in concrete en systematische onderwijsbenaderingen.

De derde bijdrage van dit onderzoek is dat het laat zien hoe symbol sense om niet-standaard algebra problemen op te lossen aan leerlingen zou kunnen worden onderwezen.

Symbol sense lijkt moeilijk te onderwijzen (Arcavi et al., 2017; Hoch & Dreyfus, 2005). In het reguliere wiskundeonderwijs in het voortgezet onderwijs richten veel docenten en leerlingen zich op basisvaardigheden met het manipuleren van algebraïsche expressies (Arcavi et al., 2017), in de verwachting dat leerlingen door dit soort oefening symbol sense zullen ontwikkelen. Innovatieve benaderingen richten zich meer op het redeneren en geven suggesties hoe dit te onderwijzen, bijvoorbeeld door gebruik te maken van productieve oefeningen, zoals omgekeerd denken en het construeren van eigen voorbeelden (Friedlander & Arcavi, 2012; Kindt, 2011), door gebruik te maken van rijke, collaboratieve taken (Swan, 2008), en door snapshots voor discussies in de klas (Pierce & Stacey, 2007). De kern van onze aanpak is het idee om symbol sense te onderwijzen in een beperkt domein van algebra, het schetsen van formules. Op deze wijze zouden leerlingen expertise in zo'n beperkt domein kunnen ontwikkelen. Als het onderwijzen van het schetsen van formules zich richt op essentiële aspecten van symbol sense, zoals globaal kijken ten behoeve van herkenning, (kwalitatief) redeneren en strategisch werken, dan zouden deze essentiële aspecten van symbol sense ook gebruikt kunnen worden in een breder domein van algebra. In ons GQR-ontwerp werden deze essentiële aspecten van symbol sense expliciet en systematisch onderwezen als denkgereedschap, terwijl dit soort denkgereedschap in andere benaderingen vaak impliciet blijft. Ons onderzoek toont aan dat leerlingen inzicht kregen in formules, en essentiële aspecten van symbol sense leerden, die ze konden gebruiken bij het oplossen van niet-standaard algebra problemen. De leerlingen die bij de interventie betrokken waren, gaven aan dat ze dachten dat ze functies beter waren gaan begrijpen, dat ze formules beter konden visualiseren, met name basisfuncties, en bovendien dat kwalitatief redeneren voor hen heel nieuw en motiverend was ("we gebruiken nu globaal redeneren; het is leuk, dit soort redeneren"). Dit suggereert dat het GQR-ontwerp een motiverende en systematische manier kan zijn om leerlingen aspecten van symbol sense te onderwijzen.

Het vermogen om formules te doorzien en er betekenis aan te geven is een belangrijk aspect van symbol sense en zal ook in de toekomst belangrijk blijven wanneer technologie het manipuleren van algebraïsche formules nog verder zal overnemen. Mensen zullen wel de resultaten hiervan moeten interpreteren, globale schattingen moeten maken van de resultaten en moeten begrijpen wat er aan de hand is. Daarvoor zullen ze een soort formule sense moeten ontwikkelen, waarmee ze betekenis kunnen geven aan formules, functie families als bouwstenen van formules kunnen gebruiken, de structuur van formules kunnen identificeren, en kwalitatief redeneren kunnen gebruiken. Deze ideeën kunnen interessant zijn voor het

ontwikkelen van nieuwe curricula voor het voortgezet onderwijs. In dit proefschrift hebben we met ons GQR-ontwerp laten zien hoe deze symbol sense kan worden onderwezen aan leerlingen.