Universiteit
Leiden
The Netherlands

# Wireless random-access networks and spectra of random graphs

Sfragara, M.

**Citation**

Sfragara, M. (2020, October 28). *Wireless random-access networks and spectra of random graphs*. Retrieved from https://hdl.handle.net/1887/137987

| | |
|---|---|
| Version: | Publisher's Version |
| License: | Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden |
| Downloaded from: | https://hdl.handle.net/1887/137987 |

**Note:** To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Cover Page

Universiteit Leiden

The handle http://hdl.handle.net/1887/137987 holds various files of this Leiden University dissertation.

**Author**: Sfragara, M.
**Title**: Wireless random-access networks and spectra of random-graphs
**Issue Date**: 2020-10-28

# Samenvatting

Dit proefschrift is opgedeeld in twee delen. In deel I bestuderen we de metastabiliteitseigenschappen van zogeheten "op wachtrij gebaseerde toegangsprotocollen" voor draadloze netwerken. Het netwerk wordt gemodelleerd door een bipartiete graaf waarvan de zijden van de graaf de storingsbeperkingen representeren. In deel II bestuderen we de spectra van inhomogene Erdős-Rényi random grafen. In het bijzonder bekijken we de verdeling van de spectra van de nabuurmatrix en de Laplace matrix. Daarnaast bestuderen we de grootste eigenwaarde van de nabuurmatrix.

**Deel I**

Toegangsprotocollen voor draadloze netwerken zijn ingevoerd om botsingen tussen draadloze signalen te voorkomen. Het belangrijkste idee achter deze protocollen is dat elk apparaat in het netwerk een willekeurige klok heeft die bepaalt wanneer het een poging doet om een signaal te zenden. Elk apparaat beslist dus zelf wanneer het start met het zenden van signalen en gebruikt daarbij alleen lokale informatie. We beschouwen netwerken met toevallige toegangsprotocollen, waarbij elke knoop een server met een wachtrij representeert. De knopen kunnen actief of inactief zijn: een actieve knoop wordt inactief met snelheidsparameter één, terwijl een inactieve knoop geactiveerd wordt met een snelheidsparameter die afhangt van de lengte van de wachtrij, indien geen van de naburige knopen actief is. Van netwerken met draadloze toegangsprotocollen is bekend dat zij metastabiliteit vertonen. In een regiem waarbij de activatieparameters groot zijn, concentreert de evenwichtsverdeling van het gezamenlijke activiteitsproces zich op toestanden waarin een maximaal aantal knopen actief is. Na zeer lange tijden kan een overgang tussen twee van zulke toestanden plaatsvinden. Individuele knopen kunnen lang gedeactiveerd zijn, wat resulteert in lange wachtrijen en grote vertragingen. Om mechanismen te ontwerpen die het functioneren van draadloze netwerken verbeteren, is een goed begrip van de metastabiliteitseigenschappen belangrijk. We modelleren het netwerk als een bipartiete graaf. In de limiet dat de wachtrijen lang worden, bestuderen we de transitietijden tussen de toestanden waarbij enkel de helft van het netwerk actief is en de andere helft inactief is.

In hoofdstuk 2 beschouwen we complete bipartiete grafen. We vergelijken de transitietijden van een "intern" model, waarbij de activatieparameters afhangen van de lengte van de wachtrijen op dat moment, met de transitietijden van een "extern" model, waarbij de activatieparameters afhangen van de gemiddelde lengte van de wachtrijen op dat moment. We definiëren twee gepertubeerde externe modellen met activatieparameters die de activatieparameters van het interne model insluiten. Met behulp van koppelingstechnieken laten we zien dat de kans groot is dat de gemiddelde transitietijden en de verdeling van het interne model asymptotisch gelijk zijn aan die

van het externe model. Afhankelijk van de activatieparameters is de verdeling van de transitietijden, gedeeld door de gemiddelde transitie tijd, exponentieel, afgekapt polynomiaal of deterministisch.

In hoofdstuk 3 beschouwen we willekeurige bipartiete grafen. We beschrijven de transitie van de graaf als een opeenvolging van transities van complete bipartiete deelgrafen. Deze opeenvolging hangt op een subtiele manier af van de volledige structuur van de graaf. We formuleren een "greedy algorithmöm de meest waarschijnlijke transitiepaden tussen dominante toestanden te analyseren. Door de resultaten voor complete bipartiete grafen te combineren met een gedetailleerde analyse van het algoritme, bepalen we voor elk pad de gemiddelde transitietijd en de verdeling van de transitietijd. Afhankelijk van de activatieparameters kunnen we opnieuw het gedrag van de transitietijden in drie regimes indelen.

In hoofdstuk 4 beschouwen we dynamische bipartiete grafen. Om het effect van bewegende gebruikers in een draadloos netwerk te begrijpen, analyseren we dynamische storingsgrafen waarbij de randen kunnen verschijnen en verdwijnen over de tijd. Een knoop kan activeren als de naburige knopen allemaal inactief zijn of als de verbindingszijde met naburige knopen verdwijnt. Wanneer we interpoleren tussen deze twee situaties komen er verschillende scenario's en interessant gedrag naar voren. We identificeren hoe de orde van grootte van de gemiddelde transitietijd afhangt van de snelheid van de dynamica.

**Deel II**

Eigenwaarden spelen een belangrijke rol in de analyse van grafen. Spectrale grafentheorie bestudeert de eigenschappen van eigenwaarden en eigenvectoren van de bijbehorende nabuurmatrices en Laplace matrices. De eigenwaarden van de nabuurmatrix bevatten informatie over de topologische eigenschappen van de graaf, zoals de verbondenheid en het aantal deelgrafen met een bepaalde eigenschap. De eigenwaarden van de Laplace matrix bevatten informatie over toevalswandelingen op de graaf en stellen ons in staat om benaderingsalgoritmen te analyseren. In het standaard Erdős-Rényi model, dat het meest elementaire model in de theorie van toevallige grafen is, zijn elk paar knopen met een vaste kans met elkaar te verbonden. De spectra van zowel de nabuurmatrices als van de Laplace matrices zijn reeds in detail bestudeerd en worden goed begrepen. We beschouwen inhomogene Erdős-Rényi random grafen, waar elk paar knopen verbonden is met een zekere kans die niet voor elk paar knopen hetzelfde is, maar waarbij de kansen nog steeds onafhankelijk van elkaar zijn.

In hoofdstuk 5 beschouwen we inhomogene Erdős-Rényi random grafen in het niet-dichte en niet-dunne regime, waarbij de graad van de knopen sublineair groeit met de grootte van de graaf. We bestuderen het limietgedrag van de empirische spectrale verdeling van de nabuurmatrix en Laplace matrix. Wanneer de verbindingskansen een multiplicatieve structuur hebben, dan geven we een expliciete beschrijving van de schalingslimieten met behulp van technieken uit de theorie van vrije kansrekening. Daarnaast passen we onze resultaten toe op grafen met restricties, Chung-Lu grafen en sociale netwerken.

In hoofdstuk 6 beschouwen we inhomogene Erdős-Rényi random grafen in het dichte regime, waar het aantal verbindingen van de knopen lineair groeit met de grootte van de graaf. Met behulp van grafons leiden we een grote-afwijkingen-principe af voor de grootste eigenwaarde, en analyseren we de bijbehorende entropiefunctie in detail. De structuur van de graaf geconditioneerd op een grote afwijking kan uitgedrukt worden in termen van een variationeel probleem voor grafons. Wanneer de verbindingskansen een multiplicatieve structuur hebben, dan analyseren we dit variationeel probleem om de schalingseigenschappen van de entropiefunctie te bepalen.