Universiteit Leiden
The Netherlands

Néron models in high dimension: Nodal curves, Jacobians and tame base change

Poiret, T.

Citation
Poiret, T. (2020, October 20). *Néron models in high dimension: Nodal curves, Jacobians and tame base change*. Retrieved from https://hdl.handle.net/1887/137218

Version:	Publisher's Version
License:	Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden
Downloaded from:	https://hdl.handle.net/1887/137218

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Cover Page

The handle http://hdl.handle.net/1887/137218 holds various files of this Leiden University dissertation.

Author: Poiret, T.
Title: Néron models in high dimension: nodal curves, Jacobians and tame base change
Issue date: 2020-10-20

Résumé substantiel

Étant donné un schéma S et un ouvert schématiquement dense $U \subset S$, de nombreux U-schémas propres et lisses Z/U n'admettent pas de modèle propre et lisse sur S. Par exemple, toute courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ s'étend en courbe elliptique sur un ouvert dense de $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, mais aucune ne s'étend en courbe elliptique sur tout $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Afin de trouver le "meilleur modèle lisse possible" en l'absence de modèle propre et lisse, il peut alors être intéressant de remplacer la condition de propreté par une autre. Soit X/S un modèle de Z/U, on dit que X/S a la *propriété de Néron* (relativement à $U \to S$) lorsque pour tout S-schéma lisse Y/S, tout morphisme $Y_U \to Z$ s'étend de manière unique en un morphisme $Y \to X$. Un *modèle de Néron* est un modèle lisse et séparé ayant la propriété de Néron.

La propriété de Néron est universelle, et garantit donc l'unicité des modéles de Néron, à unique isomorphisme près. Cependant, le modèle de Néron n'existe pas toujours: par exemple, si S est le spectre d'un anneau de valuation discrète et $U \to S$ l'inclusion du point générique, alors $\mathbb{P}^1_U$ n'a pas de modèle de Néron sur S.

Néron a prouvé que toute variété abélienne au-dessus d'un ouvert dense d'un schéma de Dedekind S admet un modèle de Néron sur S. Plus récemment, la question s'est posée de construire des modèles de Néron dans des cadres plus généraux. Qing Liu et Jilong Tong ont montré que toute courbe de genre ≥ 1 définie sur un ouvert dense d'un schéma de Dedekind connexe a un modèle de Néron, qui est le lieu lisse de son modèle propre régulier minimal. Lorsque S est un schéma régulier, $U \subset S$ un ouvert dense et X/S est une courbe nodale[1] lisse au-dessus de U, David Holmes a décrit une condition nécessaire pour que la Jacobienne de X_U ait un modéle de Néron sur S, en termes de la structure locale de X autour de ses singularités. Cette thèse traite de questions d'existence et de comportement des modèles de Néron sur une base régulière sans restriction de dimension, avec une emphase particulière sur les modèles de Néron de courbes nodales et de leurs Jacobiennes. Elle comporte trois parties.

Partie I: Courbes nodales, graphes duaux et résolutions

Dans cette partie, nous partons d'un schéma régulier S, un ouvert dense $U \subset S$, et une courbe nodale X/S, lisse au-dessus de U. Lorsque S est un trait[2] et U son point générique, une étape clé dans la construction du modèle de Néron de X_U consiste typiquement à "lissifier" X, i.e. à éclater X en des sous-schémas dont le support est disjoint de U, pour rendre le lieu lisse "plus gros". Par exemple, lorsque S est un trait strictement local, après un nombre fini d'éclatements successifs en des points singuliers de la fibre spéciale de X/S, on obtient un nouveau modèle nodal $X' \to X$ de X_U, tel que toute section de X/S provient d'une unique section lisse de X'/S. Nous présentons un analogue de ce procédé de lissification lorsque S est un schéma régulier sans restriction de dimension.

[1]Une courbe propre et de présentation finie, dont les fibres géométriques ont au pire des points doubles ordinaires

[2]Le spectre d'un anneau de valuation discrète

D'abord, nous définissons le *graphe dual* de X/S en un point géométrique s de S. Les sommets de ce graphe (respectivement, ses arêtes) sont les composantes irréductibles (respectivement, les points singuliers) de X_s. À une arête du graphe dual, correspondant à un point singulier x de X_s, nous associons un idéal de l'anneau local étale $\mathcal{O}^{et}_{S,s}$, l'***idéal singulier*** de x, représentatif de la complexité globale du lieu singulier de X/S autour de x. L'idéal singulier généralise la notion d'*épaisseur* d'un point singulier de la fibre spéciale de X/S, lorsque S est un trait strictement local. Par exemple, lorsque l'idéal singulier de x est premier, aucune section de X/S ne peut passer par x.

Nous appelons *raffinement* de X/S l'éclatement de X en le faisceau d'idéaux d'une S-section. Nous montrons que tout raffinement de X/S est un modèle nodal de X_U. Nous montrons que, lorsque S est excellent, pour tout point géométrique s de S et toute section $\sigma\colon S \to X$, il existe un voisinage étale V de s dans S et un raffinement X' de X_V/V tels que $\sigma|_V$ provient d'une section lisse de X_V/V. Nous prouvons également que, étale localement sur S, par composition d'un nombre fini de raffinements, il est toujours possible d'obtenir une ***résolution*** de X/S en s, i.e. un modèle nodal X' de X_U tel que tous les idéaux singuliers des points de X'_s sont premiers. Il s'ensuit que si S est strictement local et excellent, toute section σ de X/S provient d'une section du lieu lisse d'une certaine résolution de X/S. Cependant, contrairement au cas où S est de dimension 1, il peut exister plusieurs classes d'isomorphisme de résolutions de X/S, et σ ne se factorise pas nécessairement par *toute* résolution de X/S.

Partie II: Modèles de Néron de courbes nodales et de leurs Jacobiennes

Dans cette partie, nous conservons les notations X, S, U de la partie précédente, et supposons aussi que S est excellent. Nous décrivons alors des critères pour que X_U et sa Jacobienne aient des modèles de Néron au-dessus de S.

D'abord, nous cherchons à construire un modèle de Néron pour la Jacobienne J de X_U/U. Nous nous appuyons fortement sur le travail de David Holmes, qui a prouvé que si J admet un modèle de Néron, alors les graphes duaux de X/S en tout point géométrique doivent satisfaire une condition appelée *alignement*: un graphe dual est aligné lorsque tous les labels des arêtes d'un même cycle (i.e. les idéaux singuliers des points doubles correspondants) sont des puissances d'un même idéal. Une conséquence immédiate est que si J admet un modèle de Néron, alors *tout* modèle nodal de X_U doit être aligné. Nous montrons que les deux conditions suivantes sont équivalentes:

- Tout raffinement de tout changement de base lisse de X/S est aligné.
- X/S est *strictement alignée*, i.e. les labels d'un même cycle d'un même graphe dual de X/S sont toujours puissances d'un même idéal *premier*.

Puisque les modèles de Néron sont compatibles avec les changements de base lisses, il s'ensuit que si J a un modèle de Néron, alors X/S est strictement alignée. Nous montrons que cette condition est également suffisante: J a un modèle de Néron si et seulement si X/S est strictement alignée. Localement sur S, nous décrivons explicitement ce modèle de Néron N de J lorsqu'il existe: tout point géométrique s de S a un voisinage étale V tel que X_V/V ait une résolution X', et N_V est canoniquement isomorphe au quotient P/E, où P est l'espace de Picard $\mathrm{Pic}^{[0]}_{X'/V}$ paramétrisant les faisceaux inversibles de degré total 0; et E la clôture schématique de la section unité dans P.

En ce qui concerne la construction d'un modèle de Néron pour la courbe X_U/U elle-même, on s'intéresse d'abord à un problème étroitement lié, mais un peu différent: existe-t-il un morphisme de S-espaces algébriques $N \to X$, avec N/S lisse, tel que tout autre tel morphisme $Y \to X$ avec Y/S lisse se factorise par N ? Nous répondons par l'affirmative, et construisons un tel N en recollant dans la topologie étale une famille bien choisie de lieux lisses de raffinements de changements de base étales de X/S. Cet espace N, que l'on appelle *agrégat lisse* de X/S, possède des propriétés analogues à la propriété de Néron, mais il n'est en général pas séparé. En conséquence, plutôt qu'un modèle de Néron, nous allons chercher à construire un ns-modèle de Néron de X_U/U, i.e. un modèle lisse (mais pas nécessairement séparé) avec la propriété de Néron.

Par un résultat de Gabber, Liu et Lorenzini, on sait que si X/S n'a pas de courbe rationnelle dans ses fibres géométriques, alors tout morphisme $U \to X$ s'étend uniquement en une S-section. Il s'ensuit que, sous cette hypothèse additionnelle, l'agrégat lisse de X est un ns-modèle de Néron de X_U/U. Dans le cas général, cela soulève la question de construire un modèle nodal de X_U sans composante rationnelle dans ses fibres géométriques. Nous utilisons les morphismes de contraction des champs $\mathcal{M}_{g,n}$ décrits par Knudsen pour montrer que X/S peut toujours être contractée en un modèle nodal stable X^{stable} de X_U. Nous donnons une caractérisation explicite en termes de X pour que les fibres géométriques de X^{stable} n'aient pas de composantes rationnelles (i.e. pour que X_U ait un modèle nodal sans composante rationnelle dans ses fibres géométriques). Lorsque cette condition est remplie, l'agrégat lisse de X^{stable} est donc le ns-modèle de Néron de X_U/U.

Ensuite, nous cherchons des conditions sous lesquelles X_U a un modèle de Néron proprement dit, i.e. un ns-modèle de Néron séparé. Nous montrons que si X_U a un modèle de Néron, alors le lieu singulier de X/S doit être localement irréductible pour la topologie étale. En termes de graphes duaux, cela revient à demander que tous les idéaux singuliers de X/S (en tout point géométrique de S) soient des puissances d'idéaux premiers.

Une fois encore, cette condition nécessaire s'applique à tout modèle nodal de X_U, et pas seulement à X: il est possible d'obtenir une condition nécessaire plus restrictive (en termes de X) en appliquant la précédente à X^{stable}. Nous expliquons donc comment les idéaux singuliers de X^{stable} peuvent être calculés à partir de ceux de X, et nous en déduisons que si X_U a un modéle de Néron, alors X satisfait les deux conditions suivantes:

1. Tous les idéaux singuliers de X/S sont des puissances d'idéaux premiers.
2. Pour tout point géométrique s de S, et toute composante rationnelle E de

X_s rencontrant les autres composantes irréductibles de X_s en exactement deux points x et y, les idéaux singuliers de x et y sont des puissances du même idéal premier de $\mathcal{O}^{et}_{S,s}$.

Enfin, nous montrons que si X satisfait ces deux conditions et si X^{stable} n'a pas de composantes rationnelles dans ses fibres géométriques, alors X_U a bien un modèle de Néron, i.e. le ns-modèle de Néron construit précédemment est séparé.

Partie III: Changement de base modérément ramifié de modèles de Néron

Les modèles de Néron passent aux changements de base lisses, et descendent sous les recouvrements lisses. Cela est propre aux morphismes lisses. Soit $f\colon S' \to S$ un morphisme plat, $U \subset S$ un ouvert schématiquement dense et X_U/U un U-schéma propre et lisse. On pose $U' = U \times_S S'$ et $X_{U'} = X \times_S S'$. En général, lorsque X_U et $X_{U'}$ ont des modèles de Néron N et N', on a seulement un morphisme de changement de base $N \times_S S' \to N'$. Dans cette partie, nous étudions ce morphisme de changement de base lorsque S et S' sont des schémas réguliers; U est le complément d'un diviseur de S à croisements strictement normaux; f est un morphisme fini et localement libre, lisse sur U et modérément ramifié sur S; et X_U est une variété abélienne. Il s'agit d'une généralisation en dimension arbitraire d'un travail similaire réalisé par Bas Edixhoven sur la descente des modèles de Néron de variétés abéliennes le long d'extensions modérément ramifiées d'anneaux de valuation discrète.

Nous nous intèressons principalement à des questions de descente: supposons que $X_{U'}$ ait un modèle de Néron N'/S', X_U a-t-il un modèle de Néron N ? Et si oui, que peut-on dire de N ?

Nous répondons par l'affirmative à la première de ces questions. Nous rappelons que le foncteur $T/S \mapsto N'(T \times_S S')$, appelé *restriction de Weil* de N' à S et noté $\prod_{S'/S} N'$, est représentable, et qu'il existe un morphisme naturel $X_U \to \prod_{S'/S} N'$. Nous montrons que la clôture schématique de X_U dans $\prod_{S'/S} N'$ est le modèle de Néron de X_U.

Ensuite, nous tentons de rendre explicite N en termes de N'. Tout point géométrique s de S a un voisinage étale affine $V = \operatorname{Spec} R$, tel que $V \times_S S'$ soit de la forme $\operatorname{Spec} R'$ avec

$$R' = R[T_1, ..., T_r]/(T_j^{n_j} - f_j)_{1 \leq j \leq r}$$

pour un système régulier de paramètres $(f_1, ..., f_r)$ de R; et tel que tous les f_i s'annulent en s. En conséquence, par la suite, nous allons supposer que $S = \operatorname{Spec} R$ et $S' = \operatorname{Spec} R'$ sont tels que ci-dessus, et nous allons nous intéresser à N_Z, où Z est le sous-schéma de S où tous les f_i s'annulent. Remarquons que Z est aussi le sous-schéma fermé de S' où tous les T_i s'annulent. Nous allons décrire une certaine filtration de N_Z.

Soit μ_{n_j} le groupe des racines n_j-èmes de l'unité dans R. Quitte à remplacer R par une extension étale, on suppose que μ_{n_j} est d'ordre n_j. Le groupe $G = \prod_{i=1}^{r} \mu_j$ agit à droite sur S' via $(\xi_i)_{1 \leq i \leq r}.T_j = \xi_j T_j$. Cette action induit naturellement une action de G sur $\prod_{S'/S} N'$, et nous montrons que N représente le foncteur $\left(\prod_{S'/S} N'\right)^G$ des invariants sous cette action.

Appelons A'_d le sous-A-module de A' composé des polynômes homogènes de degré d en les T_j; et Λ_d la A-base de A'_d constituée de ses monômes unitaires. Nous exhibons une filtration descendante $(F^d N'_Z)_{d \in \mathbb{N}}$ de sous-Z-espaces algébriques en groupes de $\left(\prod_{S'/S} N'\right) \times_S Z$. Cette filtration est stationnaire et triviale à partir de $d = 1 + \prod_{j=1}^{r}(n_j - 1)$. Nous montrons que le quotient $\mathrm{Gr}^0 N'_Z := F^0 N'_Z / F^1 N'_Z$ est canoniquement isomorphe à N'_Z; et pour $d \geq 1$, nous exhibons un isomorphisme canonique entre $\mathrm{Gr}^d N'_Z := F^d N'_Z / F^{d+1} N'_Z$ et l'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}_{N'_Z/Z}(A'_d)$. Cette dernière est elle-même canoniquement isomorphe au produit fibré $\prod_{P \in \Lambda_d, Z} \mathrm{Lie}_{N'_Z/Z}(PA)$, où chaque $\mathrm{Lie}_{N'_Z/Z}(PA)$ est (non-canoniquement) isomorphe à l'algèbre de Lie "classique" $\mathrm{Lie}_{N'_Z/Z}$ puisque PA est un A-module libre de rang 1.

L'action naturelle de G sur N' induit des actions équivariantes sur les $F^d N'_Z$, donc sur les $\mathrm{Gr}^d N'_Z$. Nous montrons que cette action naturelle $G \curvearrowright \mathrm{Gr}^d N'_Z$ est obtenue à partir d'actions de G sur chaque facteur $\mathrm{Lie}_{N'_Z/Z}(PA)$, et que si P est le monôme $\prod_{i=1}^{r} T_i^{k_i}$, alors l'espace des invariants $\mathrm{Lie}_{N'_Z/Z}(PA)^G$ s'identifie via le morphisme $P \mapsto 1$ au sous-espace de $\mathrm{Lie}_{N'_Z/Z}$ où chaque $(\xi_i)_{1 \leq i \leq r}$ dans G agit par multiplication par $\prod_i \xi_i^{k_i}$. En conséquence, les espaces $F^d N_Z := (F^d N'_Z)^G$ forment une filtration descendante de sous-Z-espaces algébriques en groupes de $N_Z = (F^0 N'_Z)^G$, stationnaire et triviale à partir de $d = 1 + \prod_{j=1}^{r}(n_j - 1)$, dont nous avons explicité les quotients successifs.