



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Noisy patterns: Bridging the gap between stochastics and dynamics

Hamster, C.H.S.

Citation

Hamster, C. H. S. (2020, September 9). *Noisy patterns: Bridging the gap between stochastics and dynamics*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/136538>

Version: Publisher's Version

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/136538>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Cover Page



Universiteit Leiden



The handle <http://hdl.handle.net/1887/136538> holds various files of this Leiden University dissertation.

Author: Hamster, C.H.S

Title: Noisy patterns: Bridging the gap between stochastics and dynamics

Issue date: 2020-09-09

Samenvatting

Wiskundigen mogen graag vertellen dat de kracht van de wiskunde ligt in de abstractie. We strippen elk probleem, ongeacht of het komt uit de natuurkunde, biologie, scheikunde, logistiek, of welke tak van sport dan ook, tot er iets overblijft dat we kunnen vangen in definities, stellingen en bewijzen. De terugkoppeling naar de echte wereld is echter vaak lastig en de meeste wiskundigen zullen dan ook opmerken dat hun werk ‘misschien ooit een echte toepassing¹ zal krijgen.’ Dit betekent echter niet dat we als wiskundigen niet druk bezig zijn met ‘ooit’ dichterbij te brengen.

Stochastiek

Als eerste zullen we ons moeten realiseren dat de buitenwereld niet perfect is zoals onze wiskundige modellen, maar dat er juist vaak ruis op de lijn zit. Stel je de volgende situatie voor: je hebt een baksteen in je ene hand, een veer in de andere, en laat ze tegelijkertijd vallen. Allebei vallen ze volgens de wetten van Newton, allebei ondervinden ze dezelfde versnelling door de zwaartekracht (per definitie $1g$), maar het resultaat is totaal anders. De stroming van de lucht heeft nauwelijks invloed op de baksteen, maar des te meer op de veer. Het is dan ook gemakkelijk uit te rekenen waar de baksteen terecht komt (recht onder de plek waar je de steen losliet), maar datzelfde doen voor de veer is praktisch onmogelijk. Daarvoor zouden we de luchtstromen zeer gedetailleerd moeten kennen wat (nog) niet haalbaar is.

We kunnen dus de echte plek waar de veer landt niet bepalen, maar we kunnen onszelf wel de volgende vraag stellen: kunnen we voorspellen waar de veer waarschijnlijk terecht komt? Hiervoor moeten we dus bepalen hoe de lucht de veer beïnvloedt, maar welke kant de lucht de veer op duwt en hoe sterk weten we niet. Daarom zullen we de invloed van de lucht modelleren als een zogenaamde stochastische² variabele. Een stochastische variabele ligt, in tegenstelling tot een ‘normale’ variabele, of deterministische variabele, niet vast. We weten de massa van de veer, we kennen de temperatuur in ons laboratorium en hoewel deze waarden natuurlijk kunnen veranderen (het zijn immers variabelen) kunnen we de waarden op elk tijdstip zo precies mogelijk meten als onze meetapparatuur toelaat. Bij een stochastische variabele is dat anders, je weet alleen welke waarden een stochastische variabele *kan* aannemen.

Een voorbeeld van een stochastische variabele dat iedereen zal kennen is de dobbelsteen: voor elke worp komt er 1, 2, 3, 4, 5 of 6 tevoorschijn, maar je weet van tevoren niet welke er boven komt. Wat we wel weten van de (eerlijke) dobbelsteen is de

¹ In de woorden van een meer nihilistisch ingestelde wiskundige: “Een toepassing, het kan de beste overkomen.”

² Afgeleid van het Oudgriekse *στοχάζομαι*, *stochadzomai*, gokken.

kansverdeling: de kans dat je een specifiek getal gooit is $1/6$. Nu wordt het tijd voor wat wiskunde. Eerst geven we de stochastische variabele ‘gooi een dobbelsteen’ een naam of symbool, laten we X nemen. Verder introduceren we de letter E voor het nemen van het gemiddelde. De zin ‘het gemiddelde van een dobbelsteenworp’ kan nu dus compact worden geschreven als $E[X]$. Dit getal kunnen we uitrekenen: er zijn 6 uitkomsten mogelijk die allemaal een gelijke kans hebben van $1/6$, dus we vinden

$$E[X] = \frac{\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6}{6} = 3,5.$$

Nota Bene: Je kan dus in een enkele worp nooit het gemiddelde gooien want er staat geen 3,5 op de dobbelsteen.

Terug naar de veer. We behandelen de invloed van de lucht op de veer dus ook als een stochastische variabele en we introduceren hiervoor de notatie³ $F_L(t)$. We nemen voor het gemak aan dat op elk tijdstip de sterkte en de richting van de kracht willekeurig zijn. Dit betekent dus dat de netto kracht die de lucht uitoefent op de veer 0 is, of in wiskundige notatie:

$$E[F_L(t)] = 0.$$

Het is hier dus essentieel om op te merken dat, alhoewel de gemiddelde bijdrage van de lucht op 0 uitkomt, het effect op een individuele veer duidelijk niet nul is. De vraag is nu: als je het gemiddelde neemt van alle plekken waar de veer landt, is dat wel recht onder de plek waar je hem losliet? Een veer is nooit perfect symmetrisch, dus het zou zomaar kunnen dat een klein duwtje naar links meer effect heeft dan een klein duwtje naar rechts. Dit zou dan als resultaat kunnen hebben dat een kracht met netto sterkte nul, een niet-nul effect heeft op de veer, maar hoe zou je dat kunnen uitrekenen?

Dynamische systemen

Voordat we verder gaan met de stochastiek, keren we weer terug naar de klassieke tweede wet van Newton:

$$\text{kracht} = \text{massa} \times \text{versnelling}.$$

Het is hier belangrijk om op te merken dat de kracht van veel factoren afhangt. Als we opnieuw het voorbeeld van de vallende baksteen nemen, weten we bijvoorbeeld dat de luchtweerstand afhangt van hoe snel de baksteen valt. Hoe sneller de steen valt, hoe groter de luchtweerstand. De luchtweerstand hangt ook af van de dichtheid van de lucht. Als je de steen laat vallen vanuit een vliegtuig, waar de lucht erg ijl is, zal hij sneller vallen dan vanaf een flat. De snelheidsverandering van de steen hangt dus af van een veranderende kracht die weer afhangt van de valsnelheid en de hoogte, die beide weer constant veranderen omdat de steen valt. Kortom, alle parameters in het systeem veranderen, niet alleen door een oorzaak van buitenaf, maar juist ook door de beweging van de steen zelf. De vergelijkingen die dit samenspel beschrijven noemen we een dynamisch systeem.

³ F voor kracht (force), het subscript L om de afhankelijkheid van de lucht aan te geven (i.t.t. bijvoorbeeld de zwaartekracht) en de t om de afhankelijkheid van de tijd aan te geven.



(a)



(b)

Afbeelding 1: Twee voorbeelden van patronen die kunnen worden verklaard met behulp van RDV's. In afbeelding (a) zien we strepen op de kop van een zebra. In afbeelding (b) zien we cirkelpatronen in een Belousov–Zhabotinsky-reactie. Afbeelding (b) met dank aan Stephen Morris, Toronto, Canada.

In bijna alle situaties in de natuur waar verandering plaats vindt, of het nu het weer is of het groeien van een plant, kan men beschrijven met zogenoemde dynamische systemen. Slechts in zeldzame simpele gevallen kan je de oplossingen van dit type vergelijkingen met pen en papier uitrekenen. Indien men kwantitatieve resultaten over zo'n systeem wil hebben, wordt er vaak naar de computer gegrepen om het rekenwerk te doen. Je kan hierbij bijvoorbeeld denken aan uitgebreide simulaties voor de dagelijkse weersvoorspellingen. Indien meer kwalitatieve resultaten gewenst zijn, is de hulp van wiskundigen vaak onontbeerlijk. Nog los van het feit dat ook bij computersimulaties wiskundigen onontbeerlijk zijn, omdat de vraag “hoe stop ik vergelijkingen voor het weer in een computer?” niet kan worden beantwoord zonder wiskundigen.

Stochastische reactie-diffusievergelijkingen

In Leiden besteden we veel aandacht aan een specifiek type dynamisch systeem genaamd reactie-diffusievergelijkingen (RDV's). Oorspronkelijk werd dit type vergelijking geïntroduceerd door Alan Turing (die om andere redenen beroemd is geworden) om strepen op zebra's te kunnen verklaren. Bijna zeventig jaar later zijn RDV's hét middel geworden om allerlei patronen in de natuur te begrijpen, variërend van de vorm van golven op het water tot de patronen die optreden tijdens hartritmestoornissen (tachycardia).

Het basisidee van RDV's is als volgt. Stel je een scheikunde-experiment voor waarbij meerdere chemicaliën zijn opgelost in water. De chemicaliën kunnen twee dingen doen: diffunderen en reageren. Denk bij diffunderen aan een druppel inkt in een bak water: ook als je niet roert zal de inkt vanzelf worden verspreid in het water. Dit proces noemen we diffusie. Als je meerdere stoffen toevoegt, kunnen deze gaan reageren met de inkt. Deze reactie zal het sterkst zijn op de plek waar van beide stoffen het meest aanwezig is. Als er nu een chemische reactie mogelijk is waardoor het reactieproduct ook weer terug kan naar de stoffen waar het uit is opgebouwd, kan de volgende keten

ontstaan: stel je voegt een druppel inkt toe aan de bak met chemicaliën, dan zal op de plek waar de druppel landt én een sterke reactie optreden én veel diffusie van de inkt plaatsvinden. Dit betekent dat er na korte tijd geen inkt meer is op de oorspronkelijke plek, maar wel veel reactieproduct, en dat er in een kring omheen juist veel inkt is. Vervolgens zal er dus op de oorspronkelijke plek het reactieproduct weer terug kunnen gaan naar inkt, terwijl de reactie die de inkt wegneemt nu in een kring om de plek waar de druppel landde heen het sterkst zal zijn. Nu gaat het proces zich herhalen. Dit kan dus patronen opleveren met ringen waar veel inkt of weinig inkt aanwezig is. Zoek maar eens op YouTube naar de Belousov–Zhabotinsky-reactie of zie afbeelding 1(b).

De centrale vraag die we stellen in dit proefschrift is nu als volgt: stel we hebben een reactie-diffusievergelijking waarvan we de bijbehorende patronen kennen en technieken hebben om die te bestuderen, wat kunnen we dan zeggen over de patronen als we ruis toevoegen aan de vergelijking? Om terug te keren naar de veer: kunnen we begrijpen hoe de veer valt door de lucht in vergelijking met hoe de veer valt in het vacuüm (namelijk recht naar beneden). Of voor de patronen in afbeelding 1(b): kunnen we begrijpen hoe de patronen zich gedragen als de tafel, waar het petrischaaltje op ligt trilt, ten opzichte van de patronen als de tafel niet trilt? Is het gedrag slechts een kleine afwijking van het deterministische gedrag of zal er kwalitatief ander gedrag optreden?

Nieuwe resultaten

In dit proefschrift leggen we een basis om met pen en papier stochastische RDV's te kunnen bestuderen en ze te kunnen vergelijken met hun deterministische tegenhanger. We doen dit niet voor complexe systemen zoals de vallende veer of de Belousov–Zhabotinsky-reactie, maar voor simpelere systemen die zonder ruis goed begrepen zijn, zogenaamde ‘toy models’. Voorbeelden hiervan zijn vergelijkingen met namen als de Nagumovergelijking of de FitzHugh–Nagumovergelijking, die veelvuldig voorkomen in dit proefschrift. De pulsen die overal onderaan de oneven bladzijdes in dit proefschrift staan, vormen een oplossing van de stochastische FitzHugh–Nagumovergelijking. Zonder ruis zou de afbeelding op elke pagina identiek zijn. De puls uit de inhoudsopgave zou stil staan en niet van vorm veranderen. We zien echter dat de puls wél beweegt en wél van vorm verandert. Met de technieken in dit proefschrift kunnen we deze veranderingen van de vorm en snelheid begrijpen en nauwkeurig berekenen.

De basis is gelegd, maar er is ook heel veel wat we nog niet kunnen op dit moment. We hebben één klasse van toy models bestudeerd, zogenaamde bistabiele vergelijkingen en we hebben de eerste stappen gezet om monostabiele vergelijkingen te bestuderen. Echter, andere belangrijke type vergelijkingen zoals de Korteweg–De Vriesvergelijking of Burgersvergelijking vragen nog om veel tijd en aandacht. Bovendien zijn al onze resultaten alleen nog maar in 1D; vergelijkbare problemen in 2D en 3D, zoals de Barkleyvergelijking op de cover, zijn nog onontgonnen terrein. Wij zijn niet de eersten die aan deze onderwerpen werken, maar dus ook zeker niet de laatsten. Samengevat, om ‘ooit’, het moment waarop dit onderzoek daadwerkelijk toepassingen op zal leveren, te bereiken, zullen nog vele promovendi aan de slag moeten.