



Universiteit  
Leiden  
The Netherlands

## Expansions of quantum group invariants

Schaveling, S.

### Citation

Schaveling, S. (2020, September 1). *Expansions of quantum group invariants*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/136272>

Version: Publisher's Version

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/136272>

**Note:** To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Cover Page



Universiteit Leiden



The handle <http://hdl.handle.net/1887/136272> holds various files of this Leiden University dissertation.

**Author:** Schaveling, S.

**Title:** Expansions of quantum group invariants

**Issue Date:** 2020-09-01

# Samenvatting

Dit proefschrift gaat over zogenaamde kwantumgroepen en hun knoopinvarianten. Een knoop is een inbedding van de cirkel  $S^1$  in een driedimensionale ruimte  $\mathbb{R}^3$ . We beschouwen twee knopen als equivalent als ze op een continue wijze in elkaar vervormd kunnen worden. Zo'n continue vervorming tussen twee knopen noemen we een isotopie. Een knoopinvariant is een afbeelding van de ruimte van knopen naar een verzameling  $S$ , zodanig dat deze afbeelding invariant is onder isotopieën.  $S$  kan van alles zijn, en in ons geval zal  $S$  een polynoomruimte zijn in twee variabelen.

Een kwantumgroep is in tegenstelling tot wat de naam doet vermoeden, geen groep. Een kwantumgroep is een Hopf-algebra die afkomstig is van functies op een Lie-groep. Een Hopf-algebra heeft een (co)vermenigvuldiging en een (co)eenheidselement, en kan dus gezien worden als een algebra. Een vermenigvuldigingsafbeelding op een algebra  $A$  is een afbeelding van het tensor product  $A \otimes A$  naar  $A$ . De duale van een algebra  $A$  is een zogenaamde coalgebra. Een coalgebra is een vectorruimte uitgerust met een coproduct en een coeenheid. De duale afbeelding van de vermenigvuldiging in  $A$  is dan een afbeelding van  $A^*$  naar  $A^* \otimes A^*$ , grof gezegd. Deze constructie geeft problemen als  $A$  oneindig dimensionaal is. Dit kan opgelost worden door de completering van het tensor product te beschouwen, en door de duale op een andere manier te construeren.

Een Hopf-algebra is dan een algebra en een coalgebra die uitgerust is met een antipode  $S$ . De antipode speelt de rol van inverse, maar is dat net niet. De antipode is de inverse van het coproduct, in de zin dat als beide tensor-factoren met elkaar vermenigvuldigd worden nadat  $S \otimes id$  (of andersom) is toegepast op de covermenigvuldiging  $\Delta_h$ , dit nul geeft.

In deze scriptie worden quasi-triangelulaire Hopf-algebras beschouwd. Een quasitriangelulaire structuur voor een Hopf-algebra  $H$  wordt genoteerd met  $R$ , de  $R$ -matrix. Een  $R$ -matrix voldoet aan de Yang-Baxter vergelijking. Een quasitriangelulaire structuur op Hopf-algebras zorgt ervoor dat we een knoopinvariant kunnen definiëren met behulp van de Hopf-algebra.

Laat  $\mathcal{R} = \sum \mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2$ , en noteer  $\mathcal{R}_{i,j}$  voor een element in  $H^{\otimes n}$ ,  $i, j \leq n$ ,  $i \neq j$  waarbij  $\mathcal{R}_1$  in de  $i$ -de factor staat en  $\mathcal{R}_2$  in de  $j$ -de factor te vinden is. Dan is de Yang-Baxter vergelijking geschreven als

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}.$$

Een manier om quasitriangelulaire Hopf-algebras te construeren is de Drinfel'd dubbel constructie, ook wel de quantum-dubbelconstructie genoemd.

Een standaard voorbeeld waarmee bekende knoopinvarianten zoals het Alexander en het Jones polynoom geconstrueerd kunnen worden is de kwantumgroep  $U_q(sl_2)$ . Deze algebra is afkomstig van functies op de Lie groep  $SL(2)$ . De  $U_q(sl_2)$  Hopf-algebra kan beschouwd worden als het quotient van de Drinfel'd dubbel van een deel Hopf-algebra  $U_q(b^-)$  en zijn duale  $U_q(b^+)$ .

Het is mogelijk om een variatie op de  $U_q(sl_2)$  te definiëren door de covermenigvuldiging op  $U_q(b^-)$  te vervormen met een parameter  $\epsilon$  met de eigenschap  $\epsilon^2 = 0$ . Dit is equivalent met het vermenigvuldigen van het co-haakje in de Lie bialgebra  $b^-$  en die te kwantiseren tot de Hopf-algebra  $U_q(b_\epsilon^-)$ . Vervolgens verkrijgen we een quasitriangulaire Hopf-algebra door de Drinfel'd dubbel constructie toe te passen.

In dit proefschrift word deze constructie toegepast op de Lie algebra  $sl_3$ , en de daarmee corresponderende kwantumgroep  $U_q(sl_3)$ . De resulterende knoopinvariant wordt bestudeerd en uitgerekend voor enkele knopen. Een belangrijk resultaat is dat dit in polynomiale tijd in het aantal kruisingen van de knoop kan plaatsvinden. Om de berekeningen uit te voeren, is het nodig om een formalisme te gebruiken dat in dit proefschrift wordt ingevoerd. In het laatste hoofdstuk wordt deze constructie veralgemeniseerd naar  $sl_n$ .