

Cover Page



Universiteit Leiden



The handle <http://hdl.handle.net/1887/21763> holds various files of this Leiden University dissertation.

Author: Fortes, Wagner Rodrigues

Title: Error bounds for discrete tomography

Issue Date: 2013-09-18

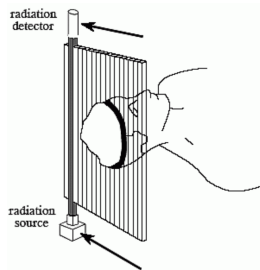
Samenvatting

Het onderzoek in dit proefschrift is gewijd aan de ontwikkeling van kwantitatieve zekerheden over de kwaliteit van reconstructies in discrete tomografie.

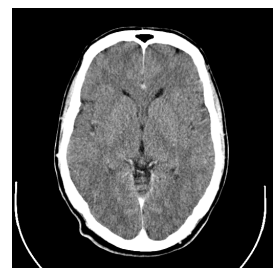
Tomografie gaat over het verkrijgen van beelden van dwarsdoorsneden door gebruik te maken van verschillende vormen van doordringende straling. Het woord tomografie is afgeleid van de Griekse woorden *tomē* ("snijden") of *tomos* ("snede") en *graphein* ("schrijven"). Het doel van tomografie is het verkrijgen van informatie over het binnenste van een object, zonder het te hoeven openen of kapot te maken. Een voorbeeld is een Computertomografie (CT) scan, welke vaak gebruikt wordt om bij medische patiënten tumoren of andere onregelmatigheden te detecteren in het weefsel van interne organen; zie Fig. 8.7(a). Een apparaat dat tomografische scans maakt wordt een *tomograaf* genoemd. Een bron van doordringende straling en een detector van de straling worden aan weerskanten van het object geplaatst. De tomograaf meet het intensiteits-profiel van de straling nadat het door het object (of de patient) is gegaan, waardoor een *projectie* van het object onder een bepaalde hoek wordt verkregen, zoals te zien in Fig. 8.7(b). Een wiskundige methode maakt van de projecties verkregen onder verschillende hoeken een *tomogram* (ook wel *reconstructie* genoemd): een beeld van het binnenste van het object. Een 2-dimensionaal gereconstrueerd beeld lijkt op een dwarsdoorsnede van het object, zoals te zien in Fig. 8.7(c).



(a) Een medische CT-scanner¹



(b) Opname van projecties²



(c) Een tomogram van de hersenen³

Figure 8.7: Na het scannen maakt een reconstructie algoritme een tomogram

¹Met dank aan Dan Dry en de University of Chicago Medicine

²Figuur uit "The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing" door Steven W. Smith

³Door Mikael Häggström [Public domain], via Wikimedia Commons

In sommige gevallen zal het oordeel van een medische dokter afhangen van de kwaliteit van de gereconstrueerde beelden (de tomograms). Tomografen maken vaak gebruik van schadelijke straling, zoals Röntgen straling, en de dosis moet worden beperkt om de patient niet te schaden. Deze beperking van stralingsdosis is één van de beperkingen die de kwaliteit van de reconstructies kan beïnvloeden. Met de huidige technologie en technieken zijn de gereconstrueerde beelden helaas ver van perfect. Als dokters een beschadigd orgaan of een vreemd object in de patient opmerken door naar een tomogram te kijken, zouden ze graag willen weten hoeveel ze kunnen vertrouwen op de kwaliteit van het beeld, voordat ze de patient naar de operatiekamer sturen. Tomografie is niet beperkt tot medische toepassingen, maar wordt bijvoorbeeld ook gebruikt in industriële kwaliteitscontrole, om defecten te identificeren binnenin geproduceerde voorwerpen.

Het zoeken naar zekerheden over de kwaliteit van reconstructies is geïnspireerd door de noodzaak van nauwkeurigheid in tomografie. Het geven van theoretische kwaliteitsgrenzen voor tomografische reconstructies is een inherent erg moeilijk probleem doordat het onderliggende wiskunde probleem slecht bepaald is. Ten eerste, het gemodeleerd probleem van het reconstrueren van beelden van een verzameling projecties is vaak onderbepaald, en heeft daarom een oneindig aantal oplossingen. Een gevonden oplossing voor het probleem hoeft dan ook niet gelijk te zijn aan het werkelijke object. Het vinden van een oplossing zelf is, wiskundig gezien, al niet triviaal. Het vinden van een oplossing tussen een oneindig aantal oplossingen, zodat de oplossing gelijk is aan het werkelijke object, is in de praktijk vaak onmogelijk. Ten tweede, reconstructiemethodes vinden normaal gesproken niet een exacte oplossing, maar een benadering. Dat wil zeggen, ze vinden een beeld met projecties die de gemeten projecties benaderen. Daarom kunnen we ook niet verwachten om het exacte binnenste van een object te vinden, maar vinden waarschijnlijk een benadering daarvan. Ten derde, als de projecties gemeten zijn door een echt apparaat is de data vaak vervuild met ruis. Het probleem van het vinden van een beeld dat perfect voldoet aan de ruizige projectie data kan gewoonlijk niet exact opgelost worden, omdat de ruis de data zo verstoort, dat het reconstructie probleem conflicterende informatie bevat. Een poging om een beeld te reconstrueren van ruizige projectie data verplaatst de ruis naar het gereconstrueerde beeld. Bovendien zijn er in sommige toepassingen beperkingen op het aantal projecties of het hoekbereik waarvoor projecties kunnen worden gemeten, wat een directe invloed heeft op de kwaliteit van de reconstructies. Samengevat kunnen we stellen dat bij tomografie een gereconstrueerd beeld aanzienlijk kan afwijken van het werkelijke object dat is gescand.

Tijdens het modelleren van het reconstructie probleem moet de interactie tussen de straling en het object wiskundig gedefinieerd worden in een *projectiemodel*. In dit proefschrift modelleren we het onbekende object door het te representeren op een raster van vierkante pixels. In sommige projectiemodellen is de som van de waarden van de pixels gelijk aan de som van de waarden van de projectie voor elke projectiehoek. Voor deze gevallen hebben we berekenbare foutgrenzen ontwikkeld voor *binair tomografie* (waar het onbekende beeld alleen zwart of wit kan zijn), wat zorgt voor zekerheden over het aantal pixels die anders zijn in het gereconstrueerde beeld dan in het werkelijke object. Hoewel het niet mogelijk is om het verschil direct te berekenen zonder het werkelijke object te kennen, kunnen we wel een grens garanderen, welke gelijk of groter is dan het werkelijke verschil. Met deze informatie kan men bepalen of de reconstructie goed genoeg is of niet. Een belangrijk idee in het afleiden van deze grenzen is een observatie die als eerst gemaakt is door Hajdu en

Tijdeman in [22], met betrekking tot het feit dat alle binaire oplossingen evenveel witte pixels bevatten en allen op een hypersfeer liggen waarvan het midden en de straal berekend kunnen worden. Met deze informatie kunnen we grenzen berekenen aan het verschil tussen binaire oplossingen van het reconstructie probleem, wat ook grenzen geeft tussen elke binaire oplossing en het werkelijke binaire object. Daarnaast hebben we grenzen voorgesteld aan het verschil tussen een gegeven binair beeld en alle binaire oplossingen.

We hebben soortgelijke grenzen ontwikkeld voor het probleem van het verkrijgen van hoge resolutie binaire reconstructies van lagere resolutie scans. In dit geval scant een apparaat (zoals een video camera) een beeld, maar door de lage resolutie van het apparaat kunnen sommige kenmerken van het beeld niet worden geïdentificeerd. Een superresolutie techniek kan worden gebruikt om een hoger resolutie beeld te krijgen, waarin de kenmerken beter te zien zijn. Dit nieuwe beeld hoeft echter niet een accurate weergave te zijn van het werkelijke gescande object. Dit probleem vraagt om een methode die zekerheden kan geven over de gemaakte fouten.

Tijdens het zoeken naar foutgrenzen voor binaire tomografie, hebben we een voldoende voorwaarde gevonden voor het bestaan van binaire oplossingen voor het reconstructie probleem. Als gezocht wordt naar een binaire oplossing met bepaalde eigenschappen, kunnen deze eigenschappen opgelegd worden aan het gemodelleerde reconstructie probleem, wat leidt tot een gemodificeerd probleem. Door te controleren of het gemodificeerde probleem voldoet aan de voorwaarde voor het bestaan van binaire oplossingen kunnen we bepalen of de opgelegde kenmerken deel kunnen zijn van een binaire oplossing, of zeker niet deel zijn van een binaire oplossing.

Om de kennis van foutgrenzen voor binaire tomografie verder uit te breiden hebben we een andere aanpak ontwikkeld met het doel om grenzen te bepalen voor het verschil tussen twee binaire oplossingen van een onderbepaald algebraïsch linear systeem van vergelijkingen. Dit kan bijvoorbeeld worden toegepast op verschillende projectiemodellen van tomografie. We hebben bovendien het probleem onderzocht van binaire tomografie met ruis in de projectie data. In dit geval is het waarschijnlijk dat er geen enkele binaire oplossing te vinden is met projecties gelijk aan de gemeten projecties. We veronderstellen dat er een ruisvrije set van projecties bestaat (die nog onbekend is), en houden rekening met de hoeveelheid ruis om geschatte foutgrenzen voor binaire oplossingen van het ruisvrije reconstructie probleem te berekenen.

In discrete tomografie hebben de oplossingen niet alleen zwarte of witte pixels, maar bestaat het beeld uit een aantal verschillende grijswaarden (zeg, 3 of 4). In sommige gevallen kunnen we veronderstellen dat de mogelijke grijswaarden van het uiteindelijke beeld van tevoren bekend zijn. Deze voorkennis kan gebruikt worden om de kwaliteit van de reconstructies te verhogen. Het is echter nog steeds een erg moeilijk probleem om discrete beelden te reconstrueren van een klein aantal projecties. In de praktijk blijkt dat veel reconstructie algoritmes voor discrete tomografie nauwkeurige reconstructies kunnen berekenen, maar de algoritmes kunnen geen wiskundige garanties geven. Wij hebben een discreet reconstructie algoritme ontwikkeld die kan garanderen dat de projecties van het gereconstrueerde beeld weinig verschillen van de gemeten projecties.

