



Universiteit  
Leiden  
The Netherlands

## Duality, bosonic particle systems and some exactly solvable models of non-equilibrium

Vafayi, K.

### Citation

Vafayi, K. (2011, December 13). *Duality, bosonic particle systems and some exactly solvable models of non-equilibrium*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/18241>

Version: Corrected Publisher's Version

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/18241>

**Note:** To cite this publication please use the final published version (if applicable).

## Nederlandse Samenvatting

In dit proefschrift bestuderen wij enkele evenwichts en niet-evenwichts stochastische modellen die exact oplosbaar zijn met de techniek van dualiteit en zelfdualiteit. Deze modellen bevatten een nieuwe klasse van deeltjessystemen die bosonisch zijn, dat wil zeggen modellen met een attractieve wisselwerking tussen de deeltjes. Als gevolg van deze attractieve interactie kan in deze modellen condensatie optreden. Ons doel hierbij is de studie van modellen die een profiel hebben dat exact kan worden berekend, alsook correlatiefuncties, zoals de tweepunts correlatiefunctie van deeltjesaantallen of van de energie. De verkregen exacte uitdrukkingen kunnen dan gebruikt worden om algemene theorieën uit de niet-evenwichts statistische mechanica te testen. De modellen die in dit proefschrift zijn bestudeerd zijn van het type “interacting particle systems”, alsook systemen van interagerende diffusieprocessen.

De basistechniek die we ontwikkelen om de modellen in dit proefschrift te bestuderen is dualiteit. Wij verbinden via dualiteit modellen van interagerende diffusieprocessen met interacting particle systems, zowel in de evenwichts als in de niet-evenwichts context. Omdat dualiteit een zeer krachtige methode is, is een gedeelte van het proefschrift gewijd aan de ontwikkeling van een algemeen formalisme van dualiteit, gebaseerd op symmetrieën van de generator. Dit formalisme kan gebruikt worden om duale processen en geassocieerde dualiteitsfuncties of zelfdualiteitsfuncties te vinden. Wij hebben het “Brownian Momentum Process” (BMP) en zijn duaal proces, het Symmetric Inclusion Process (SIP), bestudeerd. Met behulp van de dualiteit tussen BMP en SIP verkrijgen wij exacte analytische formules voor de correlatiefuncties van BMP. Het BMP is een model voor warmtegeleiding via stochastische diffusie van impuls, en het SIP is een interacting particle system waarbij deeltjes een random walk op het rooster  $\mathbb{Z}^d$  uitvoeren en met elkaar een aantrekkende wisselwerking hebben. Wij behandelen ook verschillende andere modellen en verkrijgen resultaten die toepasbaar zijn voor een grotere klasse van modellen. De twee basismodellen (SIP en BMP) en hun veralgemeningen zijn echter een essentieel startpunt in ons werk en zullen vaak worden gebruikt als illustrerende voorbeelden.

In hoofdstuk 1 laten wij zien hoe zelfdualiteit in direct verband staat met de niet abelse symmetrieën van de generator van het Markov proces (wij zeggen dat een operator  $S$  een symmetrie van de generator  $L$  is indien hij commuteert met de generator, i.e.,  $S.L = L.S$ ). Met niet abels bedoelen wij dat de symmetrie niet noodzakelijk een vermenigvuldigingsoperator is, of in de taal van matrices, niet noodzakelijk een di-

agonale matrix. Wij laten zien dat er voor iedere symmetrie van de generator een corresponderende zelfdualiteitsfunctie bestaat, en dat omgekeerd, er voor iedere zelfdualiteitsfunctie een corresponderende symmetrie van de generator is. In het geval van dualiteit tussen twee verschillende Markov processen, komt dualiteit neer op een conjugatie tussen de twee corresponderende generatoren. En dus kan dualiteit tussen twee verschillende processen worden beschouwd als het kiezen van een nieuwe representatie van de generator. Dualiteit wordt op deze wijze direct verwant met verschillende representaties van dezelfde Lie-algebra.

Wij behandelen in hoofdstuk 1 de samenhang tussen zelfdualiteit en symmetrieën in veel grotere algemeenheid en geven verschillende nieuwe voorbeelden van dualiteiten. Voor interacting particle systems of interagerende diffusies gekoppeld aan de randen met deeltjesreservoirs of warmtebaden, zoals SIP of BMP, tonen wij op welke manier de dualiteitsfunctie moeten worden veranderd om het effect van de reservoirs aan de randen mee te nemen. Voor energie transport modellen ontdekken wij een verborgen  $SU(1,1)$  symmetrie in een grote klasse van modellen (waaronder BMP, KMP modellen) die hun dualiteit verklaren, net als de  $SU(2)$  symmetrie voor SEP. Wij bewijzen ook de  $SU(1,1)$  symmetrie van het SIP en de corresponderende zelfdualiteit.

De extra sprongen in SIP (i.e., andere dan de random walk sprongen), de zogenaamde inclusie-sprongen, veroorzaken een netto attractieve wisselwerking tussen deeltjes. Dit moeten we vergelijken met SEP waar de deeltjes een repulsieve interactie hebben (omdat ze niet op de zelfde roosterplaats mogen zijn). In meer fysische terminologie kan men zo SIP als een bosonisch tegenhanger van het fermionische SEP beschouwen.

In hoofdstuk 2 analyseren wij het SIP in detail en bewijzen het analogon van Liggett's "comparison inequality", die de verwachtingswaarde van positief definitie functies in SEP vergelijkt met deze in een systeem van onafhankelijke random walkers. Met deze comparison inequality leiden wij een aantal correlatieongelijkheden af. Zoals men intuïtief verwacht, veranderen de correlaties van negatief in SEP naar positief in SIP. Dit feit is vanuit een ander standpunt bekeken echter vrij opmerkelijk, want SIP is geen monotoon proces en positieve correlaties zijn dus niet gerelateerd aan de FKG eigenschap, zoals bijvoorbeeld in de ferromagnetische Glauber dynamica. Aangezien SIP het duale van het warmtegeleidingsmodel BMP is, kunnen de correlatieongelijkheden voor SIP direct vertaald worden naar BMP en het Brownian Energy Process. Wij bestuderen ook het algemenere niet-evenwichts geval waar het systeem in contact

is met deeltjesreservoirs en waar wij de zelfdualiteit van de SIP gebruiken om een correlatie ongelijkheid voor de niet-evenwichts stationaire toestand te verkrijgen. Wij bewijzen ook in grotere algemeenheid de negatieve correlaties voor niet-evenwichts stationaire toestanden in modellen van SEP-type, waarvan sommige reeds eerder expliciet berekend werden met de matrix methode van Derrida.

In hoofdstuk 3 bestuderen wij de condensatie fenomenen en wij laten zien dat, omdat de stationaire maat van SIP exponentiële staarten heeft, de attractie tussen deeltjes alleen niet sterk genoeg is, en er een extra factor nodig is voor condensatie. Wij laten zien dat deze extra factor ruimtelijke inhomogeniteit of ook asymmetrie in een eindig of half-oneindig systeem kan zijn. Een andere mogelijkheid voor het verkrijgen van condensatie in SIP is het introduceren van een parameter  $m$  gedefinieerd als de rate van random walk jumps terwijl de intensiteit (rate) van inclusion jumps onveranderd (gelijk aan 1) blijft. Het geval  $m = 0$  levert dan een zuiver inclusieproces (geen random walk, enkel attractie) op. Wij laten zien dat in de limiet  $m \rightarrow 0$  in het SIP condensatie optreedt. Wij tonen ook gerelateerde condensatiefenomenen in het Brownian Energy Process (afgeleid van BMP en dus verwant met SIP) zien, wat een interessant nieuw voorbeeld geeft van condensatie in een model met continue variabelen.

In hoofdstuk 4 bestuderen wij BMP dicht bij evenwicht. Een mogelijkheid om dicht-bij-evenwicht condities te verkrijgen is het systeem in contact te brengen met twee warmtebaden aan de randen, met temperaturen die dicht bij elkaar liggen. In dit geval tonen wij aan dat de afstand tussen de lokale evenwichtsverdeling en de echte niet-evenwichts stationaire toestand hoogstens van de orde is van het kwadraat van het verschil tussen de temperaturen van de warmtebaden, in overeenstemming met de niet-rigoureuze theorie van McLennan ensembles. Een alternatieve mogelijkheid om condities dicht bij evenwicht te verkrijgen is om de verschillende temperaturen van de twee warmtebaden vast te houden maar de koppeling van het bulk systeem met de warmtebaden met een parameter  $\lambda$  te verzwakken. Wij bestuderen dan het gedrag van de niet-evenwichts stationaire toestand voor kleine waarden van deze koppingsconstante  $\lambda$ . In het bijzonder laten wij zien welke evenwichtsmaat wordt geselecteerd als  $\lambda \rightarrow 0$ . Voor beide gevallen zijn de temperatuursprofielen lineair in de bulk. Wij geven ook exacte berekeningen voor de tweepunts correlatiefuncties voor finite size systemen en wij laten zien dat zij in het algemeen niet multilineair zijn. Hiermee laten we zien dat de veelgebruikte multilineaire ansatz voor de correlatiefuncties alleen waar kan zijn als bijkomende symmetrieën aanwezig zijn, of in de macroscopische limiet.