



Universiteit  
Leiden  
The Netherlands

## **Advances in computational methods for Quantum Field Theory calculations**

Ruijl, B.J.G.

### **Citation**

Ruijl, B. J. G. (2017, November 2). *Advances in computational methods for Quantum Field Theory calculations*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/59455>

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/59455>

**Note:** To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Cover Page



Universiteit Leiden



The following handle holds various files of this Leiden University dissertation:

<http://hdl.handle.net/1887/59455>

**Author:** Ruijl, B.J.G.

**Title:** Advances in computational methods for Quantum Field Theory calculations

**Issue Date:** 2017-11-02

## SAMENVATTING

---

Een van de hoofddoelen van natuurkunde is begrijpen wat de fundamentele eigenschappen van de natuur zijn. Een zeer succesvol raamwerk hiervoor is Quantum Veldentheorie (QFT), dat de interacties tussen ondeelbare deeltjes beschrijft. Het Standaard Model, gebouwd op QFT, is de beste theorie over de fundamentele structuur van de natuur. Natuurkunde buiten het Standaard Model leidt waarschijnlijk tot zeer kleine afwijkingen van de uitkomst van botsingsexperimenten in deeltjesversnellers. Vandaar dat zeer precieze voorspellingen nodig zijn om nieuwe fysica te detecteren. Deze thesis zal de computationele problemen bestuderen die ontstaan bij het verbeteren van precisie.

In hoofdstuk 1 definiëren we de onderzoeksvragen en de probleemstelling.

**Probleemstelling:** Op welke manier kunnen we de prestaties van QFT-berekeningen met betrekking tot het verkrijgen van preciezere voorspellingen verbeteren?

We richten ons op drie computationele en combinatorische problemen van QFT-berekeningen die wij het urgentst achten: (1) traagheid van Monte Carlo-integraties, (2) traagheid van het berekenen van massaloze propagatorintegralen en (3) traagheid van het berekenen van de polen van Feynman-diagrammen.

**PROBLEEM 1** Monte Carlo-methodes worden vaak gebruikt in QFT-berekeningen. Nadat de integralen omgeschreven zijn in een geschikte polynomiale representatie, worden ze miljoenen keren geëvalueerd. Sommige van deze polynomen hebben meer dan honderdduizend termen, waardoor de evaluaties erg traag zijn. Dus, de eerste onderzoeksvraag luidt als volgt.

**Onderzoeksvraag 1:** Tot hoever kan het aantal operaties van grote multi-variabele polynomen gereduceerd worden?

In hoofdstuk 2 onderzoeken we manieren om uitdrukkingen te vereenvoudigen met behulp van Horner-schema's en verwijdering van vaker voorkomende subuitdrukkingen (CSEE). Onze methode gebruikt Monte Carlo Boom Zoeken (MCTS), een zoekprocedure die heel succesvol is in kunstmatige intelligentie. We gebruiken MCTS om bijna-optimale Horner-schema's te vinden. Ondanks het feit dat MCTS goede oplossingen vindt, heeft deze benadering twee uitdagingen. (1) MCTS (met UCT) introduceert een constante,  $C_p$ , die de balans tussen exploratie en exploitatie regelt. Deze constante moet handmatig afgestemd worden. (2) Er moet meer gerichte exploratie aan het einde van de boom zijn, aangezien de huidige methode de kwaliteit van de oplossingen negatief beïnvloedt. Om beide problemen aan te pakken, bestuderen we Genest Monte Carlo Zoeken (NMCS), maar we zien dat NMC computationeel onhaalbaar is voor ons probleem. Vervolgens passen we de UCT-formule aan door de introductie van een dynamische exploratie-exploitatie parameter  $T$ , die lineair afneemt met het iteratienummer. Daarna meten we het

effect op de prestaties. We zien dat een variabele  $C_p$  de twee problemen oplost: er is meer exploratie aan het eind van de boom en het afstemmingsprobleem versimpelt. Het gebied in  $C_p$  waarin goede waarden gevonden worden, is met meer dan een factor tien vergroot.

Vervolgens bestuderen we Stochastische Lokale Zoekmethodes, aangezien deze methodes het probleem van te weinig optimalisatie voor de laatste variabelen in het schema helemaal niet hebben. We onderzoeken de faseruimte-eigenschappen van Horner-schema's en zien dat het domein relatief plat is en dat er slechts enkele lokale minima zijn. Als gevolg kan Stochastisch Heuvel Klimmen (SHC) de Horner-ruimte goed verkennen. SHC heeft slechts twee parameters: het aantal iteraties (rekentijd) en de burenstructuur. We vinden een geschikte burenstructuur, waardoor alleen de totale rekentijd als parameter overblijft. Hierna doen we een reeks experimenten. De resultaten die we met SHC behalen zijn gelijkwaardig of beter dan die van MCTS, wat inhoudt dat het totale aantal operaties met meer dan een orde van grootte kleiner is dan het origineel. Bovendien behaalt SHC de resultaten zeker tien keer sneller. Aangezien de evaluatietijd van Monte Carlo integrators proportioneel met het aantal operaties is, hebben we de prestaties verbeterd.

**PROBLEEM 2** De meeste integralen die analytisch berekend worden, worden uitgerekend met de hulp van Partiële Integratie (IBP) identiteiten die integralen in simpelere varianten uitdrukken. Deze methode is erg langzaam in het algemeen en vergt soms maanden rekentijd op een cluster. Dus, onze tweede onderzoeksvraag luidt als volgt.

**Onderzoeksvraag 2:** Hoe kunnen we een programma construeren dat vier-lus massaloze propagatorintegralen efficiënter berekent?

In hoofdstuk 3 presenteren we de constructie van FORCER, een FORM-programma voor de reductie van vier-lus massaloze propagator-type integralen tot master integralen. Het resulterende programma voert parametrische IBP-reducties uit, net zoals het drie-lus programma MINCER. We demonstreren hoe men veel systemen van IBP-identiteiten parametrisch kan oplossen in een computer-geassisteerde manier. Vervolgens bespreken we de structuur van het FORCER-programma, zoals het herkennen van reductie-acties voor iedere topologie, het toepassen van symmetrieën, en de overgang tussen topologieën als er een lijn verwijderd wordt. Dit gedeelte is volledig vooraf uitgerekend en automatisch gegenereerd. We geven voorbeelden van recente toepassingen van FORCER en bestuderen de prestaties van het programma. We laten zien dat de vier-lus beta-functie in drie minuten berekend kan worden op een 32-kernen machine. Tot slot demonstreren we hoe het FORCER-pakket gebruikt kan worden en schetsen we hoe fysische diagrammen klaargemaakt kunnen worden voor evaluatie door FORCER.

In hoofdstuk 4 berekenen we zelfenergieën en een verzameling van drie-deeltjes-vertexfuncties voor massaloze QCD op vier lussen in het  $\overline{\text{MS}}$  renormalisatieschema met het FORCER programma. De vertexfuncties worden geëvalueerd op het punt

waar een van de momenta verdwijnt. We presenteren analytische resultaten voor een generieke ijkgroep met volledige ijkafhankelijkheid. De ongerenormaliseerde resultaten in dimensionele regularisatie worden gegeven in termen van masterintegralen en rationale coëfficiënten, welke exact zijn in de ruimte-tijd-dimensie. Onze resultaten kunnen gebruikt worden voor verder precisie-onderzoek naar het storingsgedrag van de theorie in andere schema's dan  $\overline{\text{MS}}$ .

Daarnaast hebben we ook Mellin-momenten van vier-lus splitsingsfuncties en coëfficiëntfuncties uitgerekend. Deze worden gebruikt als basisingrediënt voor botsingsprocessen, zoals Higgs-productie. We berekenen Mellin momenten  $N = 2, 4, 6$  voor het niet-singlet geval en  $N = 2, 4$  voor het singlet-geval. Bovendien berekenen we  $N = 1, 3, 5$  voor de vector-axiaal-interferentieterm  $F_3$ . Doordat we verder dan  $N = 40$  hebben uitgerekend, kunnen we de alle- $N$   $n_f^2$ -bijdrage aan de vier-lus niet-singlet splitsingsfunctie en de  $n_f^3$ -bijdrage aan de vier-lus singlet splitsingsfunctie reconstrueren. Met behulp van de OPE-methode, berekenen we tot en met  $N = 16$  voor de niet-singlet splitsingsfunctie uit. In de grote- $n_c$ -limiet berekenen we tot en met  $N = 19$ . Dit stelt ons in staat om een alle- $N$ -reconstructie te maken, die een nieuwe term oplevert in de vier-loop planaire spits anomale dimensie.

**PROBLEEM 3** Voor vijf-lus berekeningen in QCD zijn tot nu toe alleen de polen van objecten berekend, omdat het bemachtigen van de eindige termen te moeilijk is. Een manier om polen te berekenen is met de  $R^*$ -operatie, die gecompliceerd en traag is. Dus, onze derde onderzoeksvraag luidt als volgt.

**Onderzoeksvraag 3:** In hoeverre kunnen we de polen van vijf-lus diagrammen efficiënter uitrekenen met alleen maar vier-lus diagrammen?

In hoofdstuk 5 breiden we de  $R^*$ -operatie uit tot Feynman-diagrammen met willekeurige tellers, inclusief tensoren. We geven ook een nieuwe manier om infrarood-contratermen te definiëren die lijkt op de definitie van zijn ultraviolette tegenhanger. Verder drukken we zowel infrarode als ultraviolette contratermen uit in termen van schaalloze vacuümdiagrammen met logaritmische graad van divergentie. Door symmetrieën en integraal- en integraalrelaties uit te buiten, kunnen we het aantal contratermen en hun complexiteit terugbrengen. Een FORM-implementatie van deze methode is gebruikt bij de berekening van de polen in de dimensionele regulator van alle top-niveau propagatordiagrammen op vijf lussen in vierdimensionale  $\phi^3$ -theorie.

In hoofdstuk 6 rekenen we de vijf-lus correctie van de schaalafhankelijkheid van de gerenormaliseerde koppelingsconstante uit (de beta functie) voor QCD, zijn generalisatie tot niet-Abelse ijkttheorieën met een simpele compacte Lie-groep, en voor QED. Onze analytische resultaten, bemachtigd met de achtergrondveldmethode, infrarode verwisseling via de nieuwe diagram-per-diagram-implementatie van de  $R^*$ -operatie en het FORCER-programma voor massaloze vier-lus propagatoren, bevestigen de QCD en QED resultaten die slechts door één andere groep uitgerekend zijn. We bekijken de numerieke grootte van de vijf-lus correcties in het standaard

$\overline{\text{MS}}$ -schema voor QCD met  $n_f$  quarksmaken en voor pure  $\text{SU}(N)$  Yang-Mills-theorie. Het effect in QCD is veel kleiner dan de vier-lus bijdrage, zelfs voor lage schalen. Verder leiden we de vijf-lus betafunctie af in een relatief vaak voorkomend alternatief schema, het minimale momentum subtractieschema (MiniMOM) met behulp van de propagatoren en vertices berekend in hoofdstuk 4. De berekening van de vijf-lus betafunctie kostte zes dagen op een 32-kernen machine.

**CONCLUSIE** Tot slot staan we opnieuw stil bij de probleemstelling en onderzoeksvragen in hoofdstuk 7. Gebaseerd op onze vondsten, concluderen we dat we de prestaties van QFT-berekeningen hebben verbeterd in drie verschillende gebieden. Aangezien al onze methodes in de praktijk toegepast kunnen worden om theorie te vergelijken met het experiment in deeltjesversnellers, concluderen we dat we de precisie van voorspellingen verbeterd hebben.