



Universiteit  
Leiden  
The Netherlands

## Topology and geometry in chiral liquids

Zuiden, B.C. van; Zuiden B.C. van

### Citation

Zuiden, B. C. van. (2017, September 27). *Topology and geometry in chiral liquids. Casimir PhD Series*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/53199>

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/53199>

**Note:** To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Cover Page



Universiteit Leiden



The handle <http://hdl.handle.net/1887/53199> holds various files of this Leiden University dissertation.

**Author:** Zuiden, B.C. van

**Title:** Topology and geometry in chiral liquids

**Issue Date:** 2017-09-27

# Samenvatting

**C**HIRALITEIT IS een wiskundige eigenschap die objecten classificeert op hun handigheid. Onze handen, bijvoorbeeld, lijken identiek, maar zijn elkaars spiegelbeeld: we kunnen onze handen niet op elkaar plaatsen zolang de handpalmen in dezelfde richting wijzen. Deze eigenschap maakt onze handen chiraal. Chiraliteit kan makkelijk getest worden: als we het object in zijn volledigheid kunnen transleren en/of roteren naar zijn spiegelbeeld is het object *niet* chiraal. Onze handen zijn ruimtelijk chiraal, maar er bestaan ook systemen die chiraal zijn in de tijd. Neem bijvoorbeeld een analoge klok die niet ruimtelijk chiraal is. De secondewijzer op een canonieke klok draait linkshandig.♣ Veel natuurkundige modellen zijn onveranderlijk onder chiraliteit. Dat wil zeggen dat deze modellen niet discrimineren tussen links- en rechtshandige toestanden. Wanneer dit het geval is, kunnen systemen die niet chiraal zijn in een chirale toestand vervallen omdat dit energetisch gunstiger is.

Materie bestaat uit deeltjes. Veel natuurkunde beschrijft materie bestaande uit *passieve* deeltjes met positieafhankelijke interacties. Dit soort passieve materie convergeert naar een thermische *evenwichtstoestand*. Levende biologische systemen of zelfs robotische systemen zijn niet in evenwicht, ze gebruiken energie om tegen de evenwichtstoestand in te werken. Deze systemen bestaan uit *actieve* deeltjes en convergeren naar een *stabiele* toestand. De twee kenmerken van actieve deeltjes zijn dat ze energie consumeren om zichzelf te kunnen voortbewegen en om complexere interacties te hebben met andere deeltjes. Voorbeelden van simpele actieve systemen zijn stammen *E. coli*-bacteriën, een brij van spermacellen, een mierenkolonie of een zwerm vogels. Al deze systemen hebben één ding gemeen: de individuele deeltjes bewegen zich zelf voort in dezelfde richting als hun burens.

---

♣Hierbij nemen we aan dat de  $z$ -as uit de klok wijst.

De topologie en geometrie van de ruimte heeft grote invloed op hoe de materie die in die ruimte leeft zich gedraagt. Een kristal bijvoorbeeld heeft een periodieke structuur. Deze kristalstructuur kan niet voortbestaan als de ruimte zich kromt; net zoals bijvoorbeeld een legpuzzel, waarvan de stukjes niet goed in elkaar passen als de tafel gekromd is. Ook bij actieve materie heeft de topologie en geometrie van de ruimte invloed. Neem bijvoorbeeld lineair gepolariseerde deeltjes — zoals *E. coli*-bacteriën. Als deze deeltjes gevangen worden in een lange buis zal het collectief zich voortbewegen in de axiale richting. Net zo zal het collectief zich azimuthaal voortbewegen als de deeltjes gevangen zitten in een schijf of annulus.

Stel dat we actieve deeltjes gevangen zetten in een schijf. Het collectief zal zich dan azimuthaal voortbewegen, links- of rechtsom. We plaatsen nu een stroomgenerator in het middelpunt van de schijf. Door de stroming van de deeltjes zal de stroomgenerator gaan draaien en kunnen we gratis stroom opwekken. Het lijkt alsof we de tweede wet van de thermodynamica overtreden. Dit is echter niet het geval. De actieve deeltjes consumeren energie en deze energie kan gebruikt worden om de generator aan te drijven. Velen zullen zeggen, op het eerste gezicht is dit niets nieuws: het is al jaren bekend dat biologische materie op deze manier lokaal de tweede wet overtreedt. Het is op dit punt interessant om te noemen dat ook een — strikt levenloos — systeem van colloïden die aan één zijde gecoat zijn met platina in een oplossing van waterstofperoxide in water onder bestraling van ultraviolet licht de tweede wet kan overtreden.

Het begrip topologie heeft de hedendaagse wiskunde en natuurkunde veranderd. Topologie is een manier om een wiskundige ruimte zo te karakteriseren dat deze karakterisatie invariant is onder continue transformaties. Neem bijvoorbeeld een opgeblazen fietsband. Het aantal grepen of gaten in zo een object is behouden ongeacht de lineaire transformaties, geometrische oneffenheden en verschillende inbeddingen. Sterker nog, het aantal grepen fungeert als een canoniek topologisch getal, een geheel getal dat een ruimtelijk object topologisch karakteriseert. Aangezien onze fietsband maar één greep of gat heeft is dit topologische getal één. Als we dit vergelijken met een bal waar precies nul gaten in zitten, concluderen we dat er geen mogelijke manier is om een fietsband te kneden tot een bal — of vice versa. Het is echter wel mogelijk om een fietsband tot koffiekop te kneden — of andersom — omdat het aantal grepen in beide objecten gelijk is. Het aantal grepen is een van de vele mogelijke topologische getallen. Een iets ingewikkelder topologisch

getal voor ruimtelijke objecten is de zogenaamde Euler karakteristiek. In de impulsruimte kan het zogeheten Chern-getal gebruikt worden om te zien of bandkloven topologisch beschermd zijn; zulke bandkloven kunnen dan niet gesloten worden door het systeem continu te veranderen.

Analytische berekeningen voor passieve systemen in thermisch evenwicht zijn vaak al ingewikkeld. Door activiteit en complexe interacties aan het systeem toe te voegen worden deze berekeningen nog ingewikkelder. In beide gevallen kunnen computationele methoden helpen. Numerieke methoden blijken een zeer geschikte manier om analytische theorieën te bevestigen en nieuwe natuurkunde te voorspellen aan de hand van die theorieën. De computer, in combinatie met analytische methoden en mogelijk ook experimenten, maakt grote stappen mogelijk in de huidige wetenschap.

Dit proefschrift bediscussieert de topologische en geometrische eigenschappen van chirale vloeistoffen. In hoofdstuk 1 laten we zien hoe een toroïdaal systeem van vloeibare kristallen in draadgeordende toestand een spontane chirale transitie ondergaat. Dit is opmerkelijk omdat de vloeibare-kristaldeeltjes zelf niet chiraal zijn. De transitie blijkt van dezelfde klasse als die van het beroemde Isingmodel, een model voor ferromagnetisme. In hoofdstuk 2 introduceren we een systeem van lineair gepolariseerde zwemmers. Deze lineair gepolariseerde zwemmers zitten gevangen in een rooster van overlappende annuli in de zogenoemde Liebformatie. Dit systeem brengt zichzelf in een stabiele toestand die topologisch insuleert: een klassieke analogie van het befaamde kwantum-Hall-effect. In hoofdstuk 3 beschrijven we een systeem van actief chiraal roterende geladen staafvormige deeltjes. Afhankelijk van de dichtheid van deze deeltjes vormt dit collectief een driehoekig rooster waar de deeltjes zich tijdruimtelijk ordenen (de kristalfase), een vloeistof vormen, of een glas vormen. In de kristalfase vinden we stabiele toestanden in de zogeheten drie-Potts-antiferromagnetische toestand of de haringbottoestand. In de vloeibare fase observeren we stromingen langs de rand van het systeem. De chiraliteit van de deeltjes bepaalt de richting van de stroom in deze fase. In hoofdstuk 4 leiden we een nieuw computeralgoritme af dat Newtons vergelijkingen kan oplossen op een Riemannse variëteit met behoud van energie. Hoewel dit algoritme vele toepassingen heeft, beperken wij ons hier tot het smelten van kristallen op tweedimensionale oppervlakken.

