Etude sur quelques sémantiques dialogiques

Clerbout, N.

Author: Clerbout, Nicolas
Title: Etude sur quelques sémantiques dialogiques : concepts fondamentaux et éléments de metathéorie
Issue Date: 2013-12-19

Chapitre 5

Opérateurs globaux et Satisfiabilité Universelle

Dans ce Chapitre nous considérons une sémantique dialogique pour $\mathcal{L}_{LME}$, le langage modal basique enrichi avec un opérateur global unaire E. L'appellation « global » est due à la sémantique modèle-théorique de cet opérateur : il s'agit d'un diamant ($\diamond$) dont la signification n'est pas limitée à l'effet local de scanner seulement certains mondes (ceux qui sont accessibles) mais qui scanne au contraire tous les points du modèle considéré.

Plusieurs éléments expliquent notre intérêt à considérer une sémantique dialogique pour $\mathcal{L}_{LME}$. La première raison est qu'il s'agit d'une occasion d'illustrer la manière dont le cadre dialogique se comporte dans le cas de langages à plusieurs opérateurs modaux. On mettra en lumière ce que tous les types d'opérateurs modaux ont en commun, c'est-à-dire leurs règles locales. On verra donc que leurs différences se trouvent au niveau des conditions d'utilisation des contextes dialogiques, c'est-à-dire au niveau des règles structurelles. La sémantique dialogique à laquelle nous nous intéressons dans ce Chapitre fournit ainsi un exemple d'interaction entre les opérateurs modaux usuels $\Box$ et $\Diamond$ d'une part, et l'opérateur global d'autre part. La question précise qui se pose en rapport à cette interaction est la manière dont la présence de plusieurs opérateurs modaux affecte la gestion des informations, et notamment de leur disponibilité au fil des changements de contextes.

Le deuxième point qui nous intéresse dans ce Chapitre est lié à la relation entre tableau et jeux dialogiques. Les tableaux standards pour $\mathcal{L}_{LME}$ ont pour caractéristique de ne pas forcément terminer, c'est-à-dire de pouvoir contenir des branches de longueur infinie. C'était également le cas pour les tableaux de premier ordre. Mais contrairement à ceux-ci, il est possible d'utiliser une méthode de tableaux pour $\mathcal{L}_{LME}$ qui garantisse la terminaison tout en permettant de prouver exactement les mêmes formules. Il s'agit là d'une occasion de comparer le procédé dialogique des rangs, qui garantit la terminaison des parties, avec le mécanisme utilisé pour garantir la terminaison des tableaux. On verra que ce mécanisme concerne les conditions sous lesquelles les noeuds sont utilisés, ainsi qu'il est fréquent dans la méthode des tableaux : ce genre de détail dans la procédure de construction est après tout le seul aspect sur lequel il est possible d'intervenir, à part modifier les règles de génération elles-mêmes. Il s'agira donc de déterminer à quel point le mécanisme employé, que nous trouvons dans Bolander et Blackburn (2007), est comparable à celui des rangs, et si besoin de proposer une autre méthode se prêtant mieux à la comparaison.

Sur un autre plan, la sémantique dont il est ici question offre la possibilité de fournir une approche dialogique d'une notion modale plus faible que la validité, mais plus forte que la simple satisfiabilité et que nous nommerons *satisfiabilité universelle*. Dans les termes de la sémantique modèle-théorique, la satisfiabilité universelle se définit comme *vérité à au moins un monde dans tout modèle*. Cette notion est plus faible que la validité puisqu'on n'exige pas qu'une formule soit vraie à tout monde de tout modèle, mais elle est plus forte que la satisfiabilité puisque la formule doit être vraie à au moins un monde de *tout* modèle. L'ensemble des formules qui sont universellement satisfiables a été axiomatiquement caractérisé dans Humberstone (2008), où elles sont plutôt appelées ∃-valides. C'est dans Tulenheimo (2009), que l'on trouve l'appellation de satisfiabilité universelle, ainsi que la remarque rapprochant satisfiabilité universelle et opérateur E sur laquelle se fonde notre approche dialogique. Quoi qu'indirecte, cette approche a l'avantage de s'appuyer sur la combinaison entre la sémantique pour l'opérateur E et le mécanisme des rangs. Cette combinaison permet aux joueurs, et plus particulièrement au Proposant, d'effectuer un type de répétitions que nous n'avons pas rencontré jusqu'à présent.

Ces répétitions constituent un cas particulier de pratiques argumentatives dont la dialogique modale standard ne permet pas de rendre compte. Même si l'on verra que la sémantique pour $\mathcal{L}_{LME}$ ne permet pas de capturer le type de pratique en question dans sa totalité, il s'agit quand même d'un élargissement des actions à la disposition des joueurs. Dans la dialogique modale standard, une même affirmation ne reste pas disponible au fur et à mesure que les circonstances du débat, les contextes, changent : elle reste attaquable et défendable dans la mesure où les règles l'autorisent, mais l'affirmation en elle-même reste fort strictement attachée à un seul contexte. Mais plusieurs situations appellent à un affaiblissent de cette étanchéité entre contextes. Un joueur devrait par exemple pouvoir être autorisé à réitérer certaines affirmations dans le cadre des nouvelles circonstances du débat, que ce soit parce qu'il les estime toujours justifiées ou inversement pour tenter de les justifier après avoir échoué la première fois. Nous l'avons dit, la sémantique que nous considérons ici ne permettra pas de prendre totalement en charge ce type de pratiques, mais les répétitions qui y sont autorisées constituent un premier pas dans cette direction.

5.1 Jeux dialogiques avec opérateurs globaux

L'approche dialogique pour les opérateurs globaux a été évoquée dans Keiff (2007, Section 4.3.7). Dans cette Section nous revenons de manière détaillée sur les jeux dialogiques pour $\mathcal{L}_{LME}$. La règle locale pour l'opérateur E s'avère être complètement semblable à celle pour $\Diamond$ et c'est donc au niveau des règles structurelles que les opérateurs sont différenciés. Dans le cas qui nous occupe, l'une des différences est que contrairement à $\Box$ et $\Diamond$, il n'y a pas plusieurs règles de disponibilité des contextes pour E : il faut une règle bien spécifique pour rendre compte du caractère global voulu pour cet opérateur.

5.1.1 Règles de particules pour les opérateurs globaux

Définition 5.1 (Le langage)**.** Le langage $\mathcal{L}_{LME}$ est une extension de $\mathcal{L}_{LMB}$ avec l'opérateur E. De sorte que l'ensemble $Form_{LME}$ est donné par :

$$\varphi ::= \ p \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \to \varphi \mid \neg\varphi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi \mid \ \mathrm{E}\,\varphi,$$

où $p \in Prop$.

Les règles locales pour $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\neg$, $\Diamond$ et $\Box$ sont les mêmes que dans le Chapitre précédent. Pour l'opérateur E, la règle est :

Énoncé	$\mathbf{X}$! $\mathrm{E}\,\varphi : c_i$
Attaque	$\mathbf{Y}$?$[!\varphi : c_j]^\infty : c_i$
Défense	$\mathbf{X}$! $\varphi : c_j$

Exception faite du nom des opérateurs, la règle pour E est donc identique à celle pour $\Diamond$. Leur signification locale est la même en ce qu'un changement de contexte a lieu et que c'est le joueur qui défend qui choisit le contexte dans lequel la partie se poursuivra. En fait, tous les opérateurs modaux unaires partagent cette signification locale qui se distingue par la spécification du joueur qui choisit le contexte, l'attaquant dans le cas des opérateurs universels tels que le $\Box$ et le défenseur dans le cas des opérateurs existentiels tels que le $\Diamond$ ou E.[80] C'est au niveau des règles structurelles que les opérateurs globaux se différencient des opérateurs habituels.

5.1.2 Règles structurelles et exemples

Les règles de départ, de déroulement, de victoire et la règle formelle sont les règles usuelles, c'est-à-dire celles de la Section 4.1.1 du Chapitre 4. Se pose alors

80. Ceci s'applique aussi aux opérateurs d'arité supérieure à 1 qui peuvent aussi être classés selon qu'ils sont existentiels ou universels. Dans Blackburn *et al.* (2001), ils sont écrits respectivement $\triangle$ et $\triangledown$. Mais nous ne considérons dans ce travail que des opérateurs unaires.

la question de la règle de disponibilité des contextes. Puisque nous traitons avec deux types d'opérateurs modaux — $\Box$ et $\Diamond$ d'une part, et E d'autre part — il faut une règle pour chacun de ces types. Nous savons par le Chapitre précédent que plusieurs versions sont possibles pour $\Box$ et $\Diamond$. Dans ce Chapitre, nous choisissons la règle $RS3$-K que nous rappelons ici :

Règle K de Disponibilité des Contextes (RS3-K). Soit $\Delta \in \mathcal{D}(\varphi)$ dont le dernier membre est un **O** coup.

1. Supposons $M_0 \in \Delta$ avec $M_0 = \mathbf{O}\ !\Box\psi : c_i$ et $\mathrm{p}_\Delta(M) = m_0$. Soit $\Delta^\frown N$ la séquence telle que $\mathrm{F}_{\Delta^\frown N}(N) = \big[m_0, A\big]$. On a $\Delta^\frown N \in \mathcal{D}(\varphi)$ si et seulement si $RS1$ est respectée et **O** a choisi c_j à c_i dans Δ.
2. Supposons $M_0 \in \Delta$ avec $M_0 = \mathbf{O}\ ?\,[!\,\psi : c_j]^\infty : c_i$ et $\mathrm{p}_\Delta(M) = m_0$. Soit $\Delta^\frown N$ la séquence telle que $\mathrm{F}_{\Delta^\frown N}(N) = \big[m_0, D\big]$. On a $\Delta^\frown N \in \mathcal{D}(\varphi)$ si et seulement si $RS1$ est respectée et **O** a choisi c_j à c_i dans Δ.

On dit alors que c_j est disponible à c_i pour **P**.

Évidemment, on peut obtenir de nombreuses autres sémantiques en choisissant d'autres règles à la place de celle-ci. La règle de disponibilité de contextes dans le cas de E est la suivante :

Règle de Disponibilité des Contextes pour E (RS3-E). Soit $\Delta \in \mathcal{D}(\varphi)$ dont le dernier membre est un **O** coup. Supposons $M_0, M_1 \in \Delta$ avec :
– $M_0 = \mathbf{O}\ ?\,[!\,\psi : c_j]^\infty : c_i$
– $M_1 = \mathbf{P}\ !\ \mathrm{E}\,\psi : c_i$
– $\mathrm{F}_\Delta(M_0) = \big[m_0, A\big]$

Soit $\Delta^\frown N$ la séquence telle que $\mathrm{F}_{\Delta^\frown N}(N) = \big[m_0, D\big]$. On a $\Delta^\frown N \in \mathcal{D}(\varphi)$ si et seulement si $RS1$ est respectée et c_j n'est pas nouveau.

Nous avons déjà rencontré cette règle comme part de la règle alternative à $RS3$-$S5$ mentionnée en Section 4.1.2. Elle stipule que le Proposant peut choisir n'importe quel contexte qui est déjà apparu au cours de la partie pour répondre à une attaque contre une affirmation $\mathrm{E}\,\psi$. Ceci inclut les contextes apparus précédemment en vertu de la règle $RS3$-K. Autrement dit, les contextes introduits par **O** en appliquant une règle pour $\Diamond$ ou $\Box$ sont aussi disponibles pour **P** pour appliquer la règle pour E.

Le point important est que la réciproque n'est pas vraie. En effet, les conditions pour que le Proposant puisse choisir un contexte donné c_j sont bien plus strictes dans le cas de $\Diamond$ (et de $\Box$) que dans le cas de E, et les contextes éventuellement introduits par **O** quand il applique la règle pour E ne peuvent pas être utilisés par **P** pour appliquer les règles pour $\Box$ et $\Diamond$. C'est justement l'intérêt d'étudier $\mathcal{L}_{LME}$ (et de manière générale des langages comprenant plusieurs types d'opérateurs) que de considérer la manière dont des contraintes plus ou moins fortes sur l'usage des contextes dialogiques se combinent et interfèrent.

Pour illustrer la différence entre $\Diamond$ et E, considérons les Exemples 5.1 et 5.2.

Exemple 5.1.

		O			**P**		
					$\Diamond p \to \mathrm{E}\,p$	c_1	0
1	c_1	$\mathtt{n} := 1$			$\mathtt{m} := 2$	c_1	2
3	c_1	$\Diamond p$	(0)		$\mathrm{E}\,p$	c_1	4
5	c_1	$?\,[!p : c_j]^\infty$	(4)		p	c_2	8
7	c_2	p		(3)	$?\,[!p : c_j]^\infty$	c_1	6

Exemple 5.2.

		O			**P**		
					$\mathrm{E}\,p \to \Diamond p$	c_1	0
1	c_1	$\mathtt{n} := 1$			$\mathtt{m} := 2$	c_1	2
3	c_1	$\mathrm{E}\,p$	(0)		$\Diamond p$	c_1	4
5	c_1	$?\,[!p : c_j]^\infty$	(4)				
7	c_2	p		(3)	$?\,[!p : c_j]^\infty$	c_1	6

Explications. Dans l'Exemple 5.1, **O** introduit le contexte c_2 en défendant l'énoncé $\Diamond p$, et **P** peut donc choisir ce contexte pour défendre $\mathrm{E}\,p$ et gagner la partie avec le coup 8. Dans l'Exemple 5.2, au contraire, le contexte c_2 est choisi en vertu des règles pour l'opérateur E, et non en vertu des règles pour $\Diamond$. De sorte que la règle $RS3$-K n'autorise pas **P** à utiliser ce contexte pour défendre $\Diamond p$. On a ici encore une fois affaire à une question de disponibilité de l'information : n'importe quelle information n'est pas disponible pour le Proposant, quand bien même il s'agit d'une information introduite dans le débat par l'autre joueur. En l'occurrence, **P** ne peut pas utiliser une information pour attaquer ou justifier un énoncé modal standard si cette information n'a pas été spécifiquement introduite en rapport avec une modalité standard. En revanche, le Proposant a accès à d'avantage d'information quand il s'agit de défendre un coup de la forme $\mathrm{E}\,\varphi$.

Au-delà de l'exemple particulier de $\mathcal{L}_{LME}$, les jeux dialogiques que nous avons présentés ici fournissent l'idée générale de l'approche dialogique des langages contenant plusieurs types de modalité. Pour résumer, les règles locales des opérateurs modaux présentent toutes une certaine uniformité en ce qu'elles déterminent qui parmi les joueurs choisit les contextes dialogiques utilisés. C'est au niveau des règles structurelles que les opérateurs se différencient et que leur interaction se définit. La différenciation peut être telle que l'interaction est nulle, et qu'il n'y a aucune interaction entre les contextes disponibles vis-à-vis de certains opérateurs et ceux disponibles vis-à-vis d'autres opérateurs. Ce serait par exemple le cas entre opérateurs épistémiques et opérateurs temporels. À cause de l'utilisation très abstraite des contextes dialogiques que nous avons faite, de telles différenciations manquent évidemment de caractère concret. Mais si des précisions peuvent être apportées pour rendre les jeux dialogiques plus fidèles aux pratiques argumentatives effectives, les éléments que nous venons de donner n'en restent pas moins la base de la théorie dialogique de la signification pour le cas de multiples modalités.

5.2 Tableaux

5.2.1 Règles et tableaux systématiques

Les tableaux que nous considérons dans cette Section obéissent aux règles que les tableaux pour **K** présentées au Chapitre 4 auxquelles on ajoute des règles pour les formules dont l'opérateur principal est E :

– Formules α :

$$\frac{\sigma\,\mathbf{O}\text{-}\varphi \wedge \psi}{\sigma\,\mathbf{O}\text{-}\varphi} \qquad \frac{\sigma\,\mathbf{O}\text{-}\varphi \wedge \psi}{\sigma\,\mathbf{O}\text{-}\psi} \qquad \frac{\sigma\,\mathbf{P}\text{-}\varphi \vee \psi}{\sigma\,\mathbf{P}\text{-}\varphi} \qquad \frac{\sigma\,\mathbf{P}\text{-}\varphi \vee \psi}{\sigma\,\mathbf{P}\text{-}\psi}$$

$$\frac{\sigma\,\mathbf{P}\text{-}\varphi \to \psi}{\sigma\,\mathbf{O}\text{-}\varphi} \qquad \frac{\sigma\,\mathbf{P}\text{-}\varphi \to \psi}{\sigma\,\mathbf{P}\text{-}\psi} \qquad \frac{\sigma\,\mathbf{O}\text{-}\neg\varphi}{\sigma\,\mathbf{P}\text{-}\varphi} \qquad \frac{\sigma\,\mathbf{P}\text{-}\neg\varphi}{\sigma\,\mathbf{O}\text{-}\varphi}$$

– Formules β :

$$\frac{\sigma\,\mathbf{O}\text{-}\varphi \vee \psi}{\sigma\,\mathbf{O}\text{-}\varphi \mid \sigma\,\mathbf{O}\text{-}\psi} \qquad \frac{\sigma\,\mathbf{P}\text{-}\varphi \wedge \psi}{\sigma\,\mathbf{P}\text{-}\varphi \mid \sigma\,\mathbf{P}\text{-}\psi} \qquad \frac{\sigma\,\mathbf{O}\text{-}\varphi \to \psi}{\sigma\,\mathbf{P}\text{-}\varphi \mid \sigma\,\mathbf{O}\text{-}\psi}$$

– Formules π :

$$\frac{\sigma\,\mathbf{O}\text{-}\Diamond\varphi}{\sigma.n\,\mathbf{O}\text{-}\varphi} \qquad \frac{\sigma\,\mathbf{P}\text{-}\Box\varphi}{\sigma.n\,\mathbf{P}\text{-}\varphi}$$

où $\sigma.n$ est nouveau dans la branche en cours.

– Formules ν :

$$\frac{\sigma\,\mathbf{P}\text{-}\Diamond\varphi}{\sigma.n\,\mathbf{P}\text{-}\varphi} \qquad \frac{\sigma\,\mathbf{O}\text{-}\Box\varphi}{\sigma.n\,\mathbf{O}\text{-}\varphi}$$

où $\sigma.n$ apparaît déjà dans la branche en cours.

– Formules $\mathbf{O}\,\mathrm{E}$:

$$\frac{\sigma\,\mathbf{O}\,\mathrm{E}\,\varphi}{\tau\,\mathbf{O}\varphi}$$

où τ est nouveau dans la branche.

– Formules $\mathbf{P}\,\mathrm{E}$:

$$\frac{\sigma\,\mathbf{P}\,\mathrm{E}\,\varphi}{\tau\,\mathbf{P}\varphi}$$

où τ apparaît déjà dans la branche.

Un tableau construit d'après ces règles est appelé un $\mathbf{K}_E$-tableau. Le point important est que dans les règles concernant l'opérateur E le contexte τ n'est pas forcément de la forme $\sigma.n$ ou, en d'autres termes, n'est pas forcément un successeur de σ. Pour cette, un $\mathbf{K}_E$-tableau ne *termine* pas forcément, c'est-à-dire peut contenir des branches infinies. Pour le constater, considérons par exemple le tableau suivant :

I	1	$\mathbf{P}\,\mathrm{E}\,\Box p$	
II	1	$\mathbf{P}\Box p$	(I)
III	1.1	$\mathbf{P}p$	(II)
IV	1.1	$\mathbf{P}\Box p$	(I)
V	1.1.1	$\mathbf{P}p$	(IV)
VI	1.1.1	$\mathbf{P}\Box p$	(I)
VII	1.1.1.1	$\mathbf{P}p$	(VI)
		$\vdots$	

Explications. En III, le nouveau contexte 1.1 est introduit, de sorte qu'il est possible d'appliquer la règle $\mathbf{P}\,\mathrm{E}$ sur la racine en IV. Une sorte de boucle est alors entamée : un autre contexte est introduit (1.1.1) et la racine peut de nouveau être utilisée en VI, et ainsi de suite. À chaque fois, un nouveau contexte est introduit (en vertu de la règle pour les formules π) et peut être utilisé pour appliquer la règle $\mathbf{P}\,\mathrm{E}$, générant ainsi une branche infinie. Insistons sur le fait qu'à part 1.1, aucun des contextes introduits par la suite n'est un successeur du contexte 1. Si les règles pour l'opérateur E étaient restreintes aux successeurs de σ, la construction du tableau s'arrêterait à l'étape IV et une branche infinie ne serait pas produite.

Nous avons déjà rencontré des systèmes dans lesquels la terminaison des tableaux n'est pas garantie. C'est le cas des tableaux de premier ordre (Chapitre 2) et des **K4** ou **S4**-tableaux (Chapitre 4, Section 4.2.3). Tout comme c'était le cas pour ces systèmes, le fait que les $\mathbf{K}_E$-tableaux puissent ne pas terminer n'est pas un problème du point de vue de l'algorithme de traduction entre preuve et forme extensive de **P** stratégie de victoire, puisqu'un tableau clos (une preuve) ne contient aucune branche infinie : toute branche close ferme forcément après un nombre fini d'étapes dans la construction de la branche. Il faut pour cela que les tableaux soient construits d'une manière systématique garantissant que l'on obtienne un tableau clos quand un tel tableau existe. La procédure brièvement décrite en Section 2.3.1 peut facilement être adaptée pour obtenir une telle procédure pour construire des $\mathbf{K}_E$-tableaux systématiques :

– On place d'abord $1\,\mathbf{P}$-φ à l'origine du tableau, ce qui conclut la première étape. Supposons qu'on ait conclut la n-ème étape. On s'arrête seulement si l'un des deux cas de figure suivants se présente :

i) Le tableau obtenu est atomiquement clos et il n'y a pas de formule complexe **P**-signée à laquelle une règle n'a pas été appliquée,

ii) Chaque noeud étiqueté avec une formule complexe, quelque soit sa signature, a été utilié dans l'arbre obtenu.

– Dans les autres cas, on applique une règle de génération sur chaque branche qui n'est pas atomiquement close en respectant n'importe quel ordre de priorité selon lequel les formules **P** E ont la priorité la plus faible. Par exemple : les formules β ont la priorité sur les formules ν. Ces dernières ont la priorité sur les formules α, qui sont elles-mêmes prioritaires sur les formules **O** E. Puis viennent les formules π et enfin les formules **O** E.
L'application d'une règle de génération conclut l'étape $n + 1$.

On repousse le traitement des formules **P** E autant que possible de manière à ce que, tant que ces formules ne génèrent pas elles-mêmes l'apparition de nouveaux contextes, une branche infinie ne puisse pas être produite. De cette manière, si le tableau doit clore il le fera forcément avant qu'une telle branche ne soit générée.

La procédure de traduction entre preuves par $\mathbf{K}_{\mathrm{E}}$-tableau et forme extensive d'une **P** stratégie de victoire est une simple extension de celle donnée au Chapitre 4 pour le cas de la logique **K**, où les choix de contextes de **O** pour l'opérateur E sont traités de manière similaire à ceux pour l'opérateur $\Diamond$. Le point important est que cette procédure de traduction permet de démontrer que les $\mathbf{K}_{\mathrm{E}}$-tableaux sont fiables et complets vis-à-vis de l'existence de **P** stratégies de victoire dans les jeux dialogiques que nous avons définis. Or, il a été démontré que ces tableaux sont également fiables et complets pour la notion modèle-théorique de validité pour $\mathcal{L}_{LME}$.[81] Par conséquent, l'existence de **P** stratégie de victoire coïncide avec la notion de validité encore une fois dans le cas de $\mathcal{L}_{LME}$.

Ainsi que nous l'avons mentionné en introduction de ce Chapitre, une conséquence de ce résultat est que les jeux dialogiques que nous avons définis sont adéquats pour capturer une notion affaiblie de validité appelée satisfiabilité universelle puisque, comme nous l'avons expliqué, ces formules sont les formules φ telles que E φ est valide. Nous reviendrons sur cette notion dans la dernière Section de ce Chapitre. Avant cela, nous explorons un autre point intéressant de comparaison entre les $\mathbf{K}_{\mathrm{E}}$-tableaux et nos jeux dialogiques qui concerne la terminaison pour les premiers et les rangs pour les seconds.

5.2.2 Terminaison des tableaux et rangs

Il est possible de garantir que tout $\mathbf{K}_E$-tableau termine après un nombre fini d'étapes, tout en préservant la complétude de la méthode. La règle **P** E est susceptible de provoquer une branche infinie en combinaison avec les règles pour les formules π ou **O** E : tant que de nouveaux contextes sont introduits par application de l'une de ces règles, ceux-ci peuvent être utilisés pour appliquer de nouveau

81. Voir Bolander et Blackburn (2007).

la règle $\mathbf{P}\,\mathrm{E}$. Pour bloquer la création de branches infinies, une solution est donc de limiter le nombre de nouveaux contextes introduits. C'est la méthode choisie dans Bolander et Blackburn (2007) : une règle appelée $\mathcal{R}$ pose des contraintes additionnelles sur l'application des règles pour les formules π et $\mathbf{O}\,\mathrm{E}$ de façon à garantir que l'introduction de nouveaux contextes s'arrête finalement et que la règle $\mathbf{P}\,\mathrm{E}$ ne soit appliquée qu'un nombre fini de fois. Il faut alors prouver que les $\mathbf{K}_{E\mathcal{R}}$-tableaux, c'est-à-dire les $\mathbf{K}_E$-tableaux construits en respectant la règle $\mathcal{R}$, restent complets. Ce résultat est démontré dans dans Bolander et Blackburn (2007, Theorem 5.5, pp.536–7).

La règle $\mathcal{R}$ est formée à partir de la notion d'« ancêtre inclusif » (*inclusion urfather*). Soit σ un contexte apparaissant dans une branche Θ d'un tableau. L'ancêtre inclusif de σ est le contexte σ' apparaissant le plus haut dans Θ tel que l'ensemble des formules signées associées à σ dans la branche est inclus dans celui des formules signées associées à σ'. On note $\sigma' = \mathfrak{u}\,\sigma$. La règle $\mathcal{R}$ est :

> La règle pour une formule π ou $\mathbf{O}\,\mathrm{E}$ peut être appliquée à une formule signée $\sigma\,\mathbf{X}\varphi$ dans une branche Θ seulement s'il y a un contexte τ apparaissant dans Θ tel que $\sigma = \mathfrak{u}\,\tau$.

On peut formuler l'action de $\mathcal{R}$ de la manière suivante. Un contexte σ' est une copie d'un contexte σ apparaissant précédemment dans une même branche quand les formules associées à σ' sont aussi associées à σ. Supposons maintenant que parmi ces formules associées aux deux contextes, certaines soient de type π ou $\mathbf{O}\,\mathrm{E}$. Il est inutile d'appliquer les règles pertinentes sur les copies (celles associées à σ') parce qu'elles peuvent déjà être appliquées à celles associées à σ : si on appliquait les règles dans les deux cas, on obtiendrait simplement deux contextes τ (généré à partir de σ) et τ' (généré à partir de σ') qui sont des copies l'un de l'autre. Du point de vue de la clôture ou non de la branche, considérer les deux copies est inutile. La règle $\mathcal{R}$ exclut une telle perte de temps en bloquant la génération de τ', c'est-à-dire en bloquant l'application des règles pour π et $\mathbf{O}\,\mathrm{E}$ sur les formules associées à σ'.

Pour une illustration, comparons le $\mathbf{K}_{\mathrm{E}}$-tableau donné plus haut avec le $\mathbf{K}_{\mathrm{E}\mathcal{R}}$-tableau suivant :

I	1	$\mathbf{P}\,\mathrm{E}\,\Box p$	
II	1	$\mathbf{P}\Box p$	(I)
III	1.1	$\mathbf{P}p$	(II)
IV	1.1	$\mathbf{P}\Box p$	(I)
V	1.1.1	$\mathbf{P}p$	(IV)
VI	1.1.1	$\mathbf{P}\Box p$	(I)

Explications. Dans la version sans la règle $\mathcal{R}$, le tableau se poursuit après l'étape VI, mais pas ici. En effet, après cette étape il apparaît clairement que le contexte 1.1.1 n'est rien d'autre qu'une copie du contexte 1.1. Il est donc inutile de poursuivre la branche en appliquant la règle pour $\mathbf{P}\Box p$ et en introduisant un nouveau contexte 1.1.1.1. En termes d'ancêtre inclusif la situation est la suivante : à part lui-même, il n'y a pas d'autre contexte dont 1.1.1 puisse être ancêtre inclusif, puisque c'est le dernier contexte apparaissant dans la branche. Or, il n'est même pas son propre ancêtre inclusif car cette place est déjà prise par 1.1 car les formules associées à 1.1.1 sont aussi associées à 1.1.1. De sorte que la règle $\mathcal{R}$ interdit d'utiliser le noeud VI pour introduire un nouveau contexte à partir de 1.1.1.

Quand elle est associée aux autres règles pour les opérateurs modaux, la règle **P** E est susceptible de provoquer la construction d'une branche infinie. La solution de Bolander et Blackburn (2007) est d'intervenir sur ces autres règles qui, en combinaison avec la règle **P** E, peuvent provoquer cela. D'une certaine manière, la règle $\mathcal{R}$ opère une modification de la définition de ce qu'est un noeud utilisé. C'est même une modification radicale puisqu'elle consiste à considérer comme utilisés certains noeuds auxquels aucune règle n'a pourtant été appliquée ; dans notre exemple, c'est le cas du noeud VI. C'est parce que cette règle repose sur une notion très particulière d'identité qui concerne les contextes et non les formules ou même les noeuds.

Il s'agit donc d'une approche fort différente de celle des rangs dans les jeux dialogiques, qui ont pourtant une fonction similaire en rendant impossibles les parties infinies. le mécanisme des rangs repose sur le comptage du nombre d'applications d'une règle sur une *même* formule. Pour saisir cette différence, considérons la méthode de Bolander et Blackburn (2007) du point de vue dialogique. Dans nos jeux, l'introduction de nouveaux contextes est l'apanage de l'Opposant. Cela signifie qu'en termes dialogiques la règle $\mathcal{R}$ a pour effet d'interdire, dans certains cas, à l'Opposant de répondre (attaquer ou défendre) à des coups du Proposant. Or, rien dans les jeux dialogiques tels que nous les avons définis dans la Section précédente ne limite ainsi les coups autorisés à l'Opposant. Il faudrait donc ajouter une règle structurelle supplémentaire qui aurait un effet similaire à la règle $\mathcal{R}$ pour obtenir des jeux dialogiques qu'on puisse comparer immédiatement aux $\mathbf{K}_{\mathrm{E}\mathcal{R}}$-tableaux.

Si rien n'empêche de chercher à formuler une telle règle, il n'est pas inutile de remarquer qu'on aboutirait à une sémantique dialogique différente de celle que nous avons considérée auparavant. Bien sûr, la différence ne portera pas sur la classe des formules pour lesquelles il y a une **P** stratégie de victoire : le Théorème 5.5 de Bolander et Blackburn (2007) et les algorithmes de traduction nous le garantissent en principe. Pour être plus précis, la différence porterait sur la signification des opérateurs modaux. Bien que leur signification locale resterait la même dans les deux types de jeu dialogique, la règle structurelle supplémentaire restreignant les possibilités de l'Opposant n'en demeure pas moins une modification importante de l'usage des opérateurs $\Box$ et $\Diamond$. On peut douter du bien-fondé d'un tel changement de sémantique quand l'effet est de faciliter une comparaison avec les $\mathbf{K}_{\mathrm{E}\mathcal{R}}$-tableaux tandis que le point essentiel, à savoir empêcher la présence de branches infinies dans les formes extensives, est déjà assuré par le mécanisme des rangs.

Une comparaison entre la règle $\mathcal{R}$ et les rangs semble donc compromise. L'équivalent dialogique de la règle $\mathcal{R}$ semble passer par une modification des règles du jeu. La comparaison passe par cette modification et laisse complètement de côté le mécanisme des rangs. Il y a un autre motif d'insatisfaction à vouloir prendre la règle $\mathcal{R}$ comme point de départ. Que ce soit dans le cas des tableaux ou dans le cas des jeux dialogiques, le risque de poursuite à l'infini semble provoqué par le cas des expressions $\mathbf{P}\,\mathrm{E}\,\varphi$. Dans le cas des tableaux, c'est l'interaction de la règle $\mathbf{P}\,\mathrm{E}$ avec d'autres règles qui rend possibles les branches infinies. Dans le cas des jeux dialogiques, seul le rang du Proposant l'empêche de défendre indéfiniment une formule $\mathrm{E}\,\varphi$ en changeant encore et encore de contexte. Or la règle $\mathcal{R}$ n'agit pas directement sur la règle pour les formules $\mathbf{P}\,\mathrm{E}$ mais sur d'autres règles. Bien sûr, l'efficacité de $\mathcal{R}$ est indéniablement démontrée dans Bolander et Blackburn (2007). Mais les quelques éléments que nous venons d'évoquer nous incitent à chercher une alternative à cette règle qui concerne plus spécifiquement les formules $\mathbf{P}\,\mathrm{E}$, qui garantisse la terminaison des tableaux sans perte de complétude, et que l'on puisse tenter de comparer aux rangs dans les jeux dialogiques.

Nous proposons la règle $\mathcal{R}'$ suivante :

> Soit $\sigma\,\mathbf{P}\,\mathrm{E}\,\varphi$ un noeud dans une branche Θ. La règle adéquate peut être appliquée pour ajouter un noeud $\tau\,\mathbf{P}\varphi$ seulement si τ n'a pas d'ancêtre inclusif autre que lui-même dans la branche.

Il s'agit là clairement de limiter le nombre d'applications de la règle pour les formules $\mathbf{P}\,\mathrm{E}$ à un même noeud. En effet, un contexte est toujours ancêtre inclusif de lui-même s'il n'en a pas d'autres. Ceci garantit donc que la règle peut se trouver être appliquée un certain nombre de fois. En revanche, l'application de la règle se bloque dès lors qu'il s'agit d'un contexte qui a un ancêtre inclusif différent et n'est donc qu'une copie de cet ancêtre. Pour illustrer le fonctionnement de $\mathcal{R}'$, nous reprenons notre exemple précédent :

I	1	$\mathbf{P}\,\mathrm{E}\,\Box p$	
II	1	$\mathbf{P}\Box p$	(I)
III	1.1	$\mathbf{P}p$	(II)
IV	1.1	$\mathbf{P}\Box p$	(I)
V	1.1.1	$\mathbf{P}p$	(IV)

> *Explications.* La règle peut être appliquée à la racine en II parce que le contexte 1 n'a évidemment pas d'autre ancêtre inclusif que lui-même. Il en va de même pour le contexte 1.1 en IV. Par contre, il est clair que le contexte 1.1 est l'ancêtre inclusif du contexte 1.1.1. Donc, en vertu de $\mathcal{R}'$, ce dernier contexte ne peut pas être utilisé pour appliquer une nouvelle fois la règle à la racine.

Il n'est pas très difficile de vérifier que la règle $\mathcal{R}'$ ne provoque aucune perte de complétude pour les tableaux. Au fond son effet reste le même que la règle alternative $\mathcal{R}'$, à savoir empêcher la prolifération de copies de contexte qui n'apportent aucune contribution à la question de la clôture du tableau. La seule différence est que l'action de $\mathcal{R}'$ est légèrement plus précoce que celle de $\mathcal{R}$. Quoiqu'il en soit, la démonstration du Théorème 5.5 de Bolander et Blackburn (2007) peut ici être reprise avec quelques modifications pour vérifier que la complétude n'est pas perdue. Notre règle $\mathcal{R}'$ remplit donc deux des objectifs que nous nous étions fixés : elle concerne en particulier les formules $\mathbf{P}\,\mathrm{E}$ et ne provoque pas de perte de complétude.

Le bilan n'est pas aussi complètement positif en ce qui concerne le troisième objectif. Il est clair que la règle $\mathcal{R}'$ ne constitue pas une implémentation du mécanisme des rangs au sein des tableaux. En effet, la règle ne fixe pas un nombre unique d'applications autorisées de la règle pour les formules $\mathbf{P}\,\mathrm{E}$. En ce sens elle est plus permissive que les rangs ne le sont dans les jeux dialogiques. Mais même si le nombre n'en est pas préalablement défini, la règle $\mathcal{R}'$ a bien pour effet de limiter le nombre d'applications de la règle pour les formules $\mathbf{P}\,\mathrm{E}$ *à un même noeud* sans les interdire. Il est donc possible de *compter* le nombre de ces applications pour chaque noeud une fois le tableau terminé. La règle $\mathcal{R}$, elle, ne permettait pas un tel comptage puisqu'elle interdisait l'application de certaines règles. De sorte que notre règle $\mathcal{R}'$ peut plus facilement être mise en relation avec les rangs, celui du Proposant pour être précis. Cette relation apparaîtra alors, comme on peut s'y attendre, dans l'algorithme de traduction entre preuves par tableau et formes extensives de $\mathbf{P}$ stratégie. L'idée est similaire à ce que nous avons rencontré dans le cas du premier-ordre et de la logique modale : le plus grand nombre d'application de la règle $\mathbf{P}\,\mathrm{E}$ à un même noeud détermine le rang du Proposant. En d'autres termes, la preuve par tableau fournit une indication concernant la stratégie de victoire du Proposant, à savoir le nombre minimal de répétitions dont il a besoin pour pouvoir gagner.

Ces remarques concluent notre exploration de la relation entre tableaux et jeux dialogiques dans le cas de $\mathcal{L}_{LME}$. Dans ce Chapitre, notre intérêt à ce sujet a été plus particulièrement de comparer le mécanisme des rangs à des solutions différentes conçues pour garantir des effets semblables au sein de la méthode des tableaux. Nous passons maintenant aux autres raisons pour lesquelles nous nous intéressons aux jeux dialogiques définis dans ce Chapitre : les pratiques argumentatives dont ils permettent de rendre compte, ainsi que la notion particulière de validité qu'on peut capturer grâce à eux.

5.3 Déplacement du contexte et satisfiabilité universelle

Nous regroupons dans cette dernière Section quelques remarques ayant trait aux autres raisons de nous intéresser à la sémantique dialogique de l'opérateur global E. Ces remarques constituent autant de point de départ pour des sujets qui pourraient sans doute être approfondis dans des travaux futurs.

5.3.1 Modification de contexte

Il est une pratique qui peut survenir au cours d'un débat et dont les sémantiques dialogiques modales usuelles ne peuvent pas vraiment rendre compte. Ainsi que nous l'avons dit, nous nous intéressons à ces débats au cours duquel les circonstances changent et où ces changements peuvent être pris en compte. C'est là le rôle de l'approche dialogique des modalités. Mais dans les sémantiques telles que celles décrites au Chapitre 4, le processus de contextualisation est extrêmement strict et il y a une certaine étanchéité entre les contextes au sens suivant : une affirmation ou une requête y est à ce point liée à un contexte dialogique qu'elle est pour ainsi dire mise entre parenthèse en cas de changement de contexte, et y revenir (si c'est autorisé) signifie fialement revenir au moins temporairement au contexte auquel elle est liée. Quoiqu'il en soit, l'affirmation ou la requête en question n'est alors jamais disponible à d'autres contextes que celui auquel elle est liée.

Mais il s'agit là d'une lecture très forte de ce que signifie un changement de circonstances, et il peut être pertinent de vouloir une lecture un peu moins stricte. Il est en effet concevable qu'au cours d'un débat les participants puissent « exporter » certaines de leurs affirmations, par exemple, après un changement de circonstance. Ils peuvent par exemple vouloir réaffirmer des positions précédentes dans ces nouvelles circonstances, comme une manière d'affirmer que le changement de circonstances n'affecte pas leurs affirmations passées, ou au contraire tenter de profiter du changement de circonstance pour justifier une affirmation qu'ils n'ont pas réussi à défendre avant ce changement de circonstances. En d'autres termes, les participants peuvent vouloir ou avoir intérêt à *répéter* certaines de leurs affirmations dans les nouvelles circonstances qui ont surgi au cours du débat.

De tels comportements ne peuvent être représentés dans les jeux dialogiques modaux usuels que dans la limite des disponibilités entre contextes. Quand celles-ci sont aussi strictes que dans le cas de la logique **K**, un joueur ne peut guère faire plus par exemple qu'affirmer une même formule φ à tous les contextes disponibles à partir de celui où il a affirmé $\Diamond\varphi$, pour autant que son rang de répétition lui permette. L'utilisation de l'opérateur E élargit considérablement les possibilités des joueurs en augmentant considérablement le nombre de contextes qu'un joueur peut choisir pour répéter certaines de ses affirmations. Considérons la partie (nonterminale) suivante :

		O			**P**		
					E $\Box(\Box p \to p)$	c_1	0
1	c_1	$\mathtt{n} := \mathtt{1}$			$\mathtt{m} := \mathtt{3}$	c_1	2
3	c_1	$?\,[!\Box(\Box p \to p) : c_j]^\infty$	(0)		$\Box(\Box p \to p)$	c_1	4
5	c_1	$?\,[!\Box p \to p : c_2]$	(4)		$\Box p \to p$	c_2	6
7	c_2	$\Box p$	(6)				
					$\Box(\Box p \to p)$	c_2	8
9	c_2	$?\,[!\Box p \to p : c_3]$	(8)				
					$\Box(\Box p \to p)$	c_3	10

Si l'opérateur principal était un $\Diamond$ au lieu d'un E, alors le Proposant ne pourrait pas jouer le coup 10 en l'absence de transitivité de la disponibilité. Mais puisque les conditions sont si permissives dans le cas de E, le Proposant a l'occasion de répéter une même affirmation jusqu'à trois fois à trois contextes dialogiques différents dans cette partie. Cette partie n'est pas terminée, et on verra plus bas qu'il y a une manière plus efficace de jouer pour le Proposant, mais son propos est simplement d'illustrer l'apport de l'approche dialogique de $\mathcal{L}_{LME}$ par rapport à celle du langage modale basique.

La sémantique dialogique que nous avons présentée dans ce Chapitre ouvre donc la voie à la représentation de débats argumentatifs au sein desquels les joueurs peuvent tout à fait librement réitérer certaines de leurs affirmations au fur et à mesure que les circonstances changent. Mais même cette sémantique ne permet pas tout à fait de capturer le genre de pratiques que nous avons décrit. Les possibilités de répétition restent limitées aux formules qui sont dans la portée d'un opérateur E, et il ne faut pas oublier qu'elles le sont aussi par les rangs des joueurs. De plus, cette possibilité ne se révèle intéressante que pour le Proposant dans l'état actuel des choses, puisque les jeux dialogiques avec lesquels nous travaillons sont tels que les répétitions, même de ce genre, ne permettent pas à l'Opposant d'améliorer ses possibilités de victoire. On est donc encore loin d'avoir à disposition des jeux dialogiques qui offrent la liberté voulue aux joueurs à propos de la disponibilité de leurs affirmations précédentes, même si les jeux pour $\mathcal{L}_{LME}$ offrent un point de départ.

Outre cette perspective très programmatique, la sémantique dialogique pour $\mathcal{L}_{LME}$ a une autre application intéressante que nous décrivons maintenant brièvement.

5.3.2 Satisfiabilité universelle

Dans un article récent consacré à la logique indienne (Priest, 2008), G. Priest introduit une relation peu commune de conséquence, définissant une formule φ comme étant une conséquence d'un ensemble Γ de formules si et seulement si chaque modèle dans lequel chaque formule de Γ est vraie *tout court* est un modèle où φ est vraie *tout court*. La spécificité de cette relation de conséquence est la notion de vérité tout court : une formule est vraie tout court dans un modèle $\mathcal{M}$ si elle est satisfaite à au moins un point de ce modèle. Dans un article paru la même année, L. Humberstone donne une axiomatisation de l'ensemble des formules qui sont conséquences de l'ensemble vide selon cette relation de conséquence (Humberstone, 2008). Humberstone appelle $\exists$-valides ces formules, qui sont vraies à au moins un point dans chaque modèle. Nous suivons plutôt la terminologie de T. Tulenheimo et disons de ces formules qu'elles sont universellement satisfiables. [82]

Les formules suivantes sont des exemples de formules universellement satisfiables :

Exemple 5.3.
- $\Box(\Box p \to p)$,
- $p \to \Box p$,
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

Ainsi que le suggère le troisième exemple, une formule valide est forcément universellement satisfiable : si une formule est vraie à tout point de tout modèle alors elle l'est *a fortiori* à au moins un point de tout modèle. Les deux premiers exemples sont tirés de Humberstone (2008).

La notion de satisfiabilité universelle a la particularité d'être aussi bien plus faible que celle de validité, puisqu'il suffit d'un monde dans tout modèle, que plus forte que celle de satisfiabilité puisqu'il faut considérer tous les modèles. On sait que la notion de satisfiabilité n'a aucune place dans la théorie dialogique de la signification. Mais on sait aussi, à travers les différents théorèmes de fiabilité et complétude et leurs corollaires, que l'approche dialogique possède une notion équivalente à celle de validité, à savoir l'existence de stratégies de victoire pour le Proposant. On peut se poser la question de la manière dont l'approche dialogique peut être liée à la notion plus faible de satisfiabilité universelle. Or, les jeux dialogiques que nous avons étudiés dans ce Chapitre permettent de rendre indirectement compte de cette notion.

En effet, T. Tulenheimo a également remarqué que l'on peut rapprocher la notion de satisfiabilité universelle telle qu'appliquée au langage modal basique de celle de validité dans le cas de $\mathcal{L}_{LME}$. Étant donnée la sémantique modèle-théorique de l'opérateur E, il n'est pas difficile de constater que :

Lemme 5.3.1. *Soit φ une formule du langage modal basique : φ est universellement satisfiable si et seulement si* $\mathrm{E}\,\varphi$ *est valide.*

En effet, la validité de $\mathrm{E}\,\varphi$ n'a d'autre signification que la suivante : dans tous les modèles, il y a au moins un monde où φ est satisfaite. Et il s'agit là précisément de la définition de la satisfiabilité universelle.

82. Tulenheimo (2009).

À partir de là, il est facile de voir comment les jeux dialogiques de ce Chapitre permette d'avoir une prise sur la notion de satisfiabilité universelle. Comme nous l'avons vu en Section 5.2, les $\mathbf{K}_{\mathrm{E}}$-tableaux sont fiables et complets par rapport à l'existence de **P** stratégies de victoire dans ces jeux dialogiques. Par corollaire, on obtient donc que pour toute formule φ de $\mathcal{L}_{LME}$, il y une stratégie de victoire pour le Proposant dans $\mathcal{D}(\varphi)$ si et seulement si φ est valide. Étant donné le Lemme 5.3.1, on conclut facilement qu'il y a une stratégie de victoire pour le Proposant de $\mathcal{D}(\mathrm{E}\,\varphi)$ si et seulement si φ est universellement satisfiable.

À titre d'exemple, nous considérons une partie tirée de $\mathcal{D}\big(\mathrm{E}\,\Box(\Box p \to p)\big)$. Celle-ci indique que le Proposant dispose d'une stratégie de victoire dans ce jeu, car il est assez aisé de constater que les répétitions et les changements d'ordre de coups n'améliorent pas les perspectives de l'Opposant.

Exemple 5.4.

		O			**P**		
					$\mathrm{E}\,\Box(\Box p \to p)$	c_1	0
1	c_1	$\mathtt{n} := \mathtt{1}$			$\mathtt{m} := \mathtt{2}$	c_1	2
3	c_1	$?\,[!\Box(\Box p \to p) : c_j]^\infty$	(0)		$\Box(\Box p \to p)$	c_1	4
5	c_1	$?\,[!\Box p \to p : c_2]$	(4)		$\Box p \to p$	c_2	6
7	c_2	$\Box p$	(6)				
					$\Box(\Box p \to p)$	c_2	8
9	c_2	$?\,[!\Box p \to p : c_3]$	(8)		$\Box p \to p$	c_3	10
11	c_3	$\Box p$	(10)		p	c_3	14
13	c_3	p		(7)	$?\,[!p : c_3]$	c_2	12

Explications. Le Proposant ne peut pas défendre face à l'attaque 7 à cause de la Règle Formelle. Il ne peut pas non plus contre-attaquer puisqu'aucun contexte dialogique ne lui est disponible pour attaquer un $\Box$: l'Opposant n'a, à ce moment du débat, choisi aucun contexte à c_2. Mais contrairement à la situation au coup 4 il y a maintenant un autre contexte disponible, c_2, dans le débat. Le Proposant peut donc défendre une nouvelle fois la thèse, mais en choisissant cette fois le contexte c_2. Par la suite, l'Opposant choisit c_3 à c_2 au coup 9. De sorte que, pour répondre à l'attaque 11, le Proposant peut dans un premier temps (coup 12) attaquer le coup 7 en choisissant le contexte c_3 puis affirmer p à c_3 au coup 14 pour gagner la partie.

On peut regretter que ce traitement dialogique de la satisfiabilité universelle soit indirecte, parce qu'elle passe par l'ajout de l'opérateur E et le Lemme 5.3.1. L'enrichissement du langage et le passage par la notion de validité ne sont pas nécessaires pour définir cette notion. D'où la perspective d'une approche différente pour déterminer une notion dialogique à laquelle la satisfiabilité universelle corresponde, s'il y a une telle notion. La première étape de cette approche consisterait à se limiter au langage modal basique, et donc à se cantonner à une sémantique dialogique standard tirée du Chapitre 4. On sait que l'existence d'une **P** stratégie de victoire y est l'équivalent de la notion de validité. Puisque la satisfiabilité universelle est plus faible que la validité, il s'agirait donc de trouver une notion plus faible que l'existence d'une **P** stratégie de victoire qui y correspondrait. Il pourrait s'agir de considérer un certain type de **P** stratégies qui, bien que n'étant pas des stratégies de victoire à part entière, concernerait une forme affaiblie de victoire. La difficulté, et donc le projet, étant alors de déterminer cette forme affaiblie et de démontrer la correspondance avec la satisfiabilité universelle. Un tel résultat permettrait de donner une perspective sur la satisfiabilité universelle qui soit tirée du domaine des jeux, et qui permettrait d'en évaluer la pertinence en termes de pratiques et débats argumentatifs.