Pulses in singularly perturbed reaction-diffusion systems

Veerman, F.W.J.

Samenvatting

Deze samenvatting is een Nederlandse versie van het eerste deel van de inleiding, hoofdstuk 1. Net zoals de inleiding is deze samenvatting geschreven voor niet-wetenschappers: het doel van deze samenvatting is een zo groot mogelijk lezerspubliek duidelijk te maken waar dit proefschrift over gaat.
De afbeeldingen waarnaar verwezen wordt zijn te vinden in hoofdstuk 1.

Hoe moet ik dit proefschrift lezen?

Een wiskundeproefschrift is voor niet-wiskundigen moeilijk te lezen, om verschillende redenen. Als eerste, natuurlijk, de formules. Een wiskundige brengt een groot deel van zijn boodschap over door gebruik te maken van symbolen, en de verbanden tussen die symbolen door formules. Als je niet zo veel ervaring hebt met het gebruik van symbolen en formules, is het doorworstelen van teksten die daarmee doordrenkt zijn onbegonnen werk.
Het gebruik van symbolen om wiskunde over te brengen is echter niet alleen handig, het is ook noodzakelijk. Het stelt de onderzoeker in staat om bepaalde (af en toe heel abstracte) ideeën over te brengen met maar een paar symbolen, waardoor zijn redenering goed te volgen blijft – voor medewiskundigen. Als je alle symbolen in dit proefschrift in woorden zou omzetten, zou de tekst binnen de korste keren onleesbaar worden: de zinnen zouden pagina's lang zijn, het zou onmogelijk worden een duidelijke zinsbouw te gebruiken, en daarmee zou alle hoop vervliegen op het begrijpelijk overbrengen van ideeën op de lezer. De beknoptheid en helderheid van symbolen bewijzen in de wiskunde al eeuwenlang hun nut. Symbolen en formules stellen je in staat nieuwe verbanden te ontdekken, wat het vervolgens weer mogelijk maakt om op abstracter niveau over je onderwerp na te denken, wat leidt tot dieper inzicht – en dat geldt niet alleen voor wiskundigen, maar ook voor alle andere wetenschappers die de 'taal van de wiskunde' gebruiken om hun resultaten samen te vatten.

Als je symbolen en formules begint te gebruiken, en gaandeweg ervaren wordt in het lezen ervan, zul je merken dat de symbolen (en de ideeën die ze symboliseren) tastbaarder worden. Je krijgt meer en meer het gevoel waar het symbool eigenlijk voor staat, hoe het zich gedraagt, hoe het reageert op andere symbolen, wat het doet. Vervolgens kun je de symbolen heen en weer gaan schuiven, ze manipuleren, en ondertussen nieuwe symbolen introduceren omdat dat de handigste manier is om weer te geven wat je wil zeggen – en plotseling ben je wiskunde aan het doen.

De tweede reden waarom wiskunde moeilijk te lezen is, is de taal die wordt gebezigd. Als wiskundige is het je doel om objectieve waarheden over te brengen, om een samenhangend en logisch kloppend verhaal te vertellen. Dat betekent onherroepelijk dat de taal ook objectief wordt: in de wiskunde is er voor 'ik' of 'jij' geen plaats, hoogstens voor 'wij'. In een wiskundetekst word je door de auteur stap voor stap meegenomen langs de weg die leidt tot inzicht in een wiskundig onderwerp. Het is een breed gedragen opvatting dat alles wat maar in de buurt van subjectiviteit komt, te allen tijde moet worden vermeden. Wiskundige waarheden hangen immers niet af van degene die ze verkondigt (tenminste, dat zou zo moeten zijn). Bovendien maakt het formuleren van zinnen in subjectieve vorm je ook vatbaarder voor kritiek: *jij* zegt wel dat het zo is, maar dat betekent niet dat *ik* dat zou moeten geloven.
Hoewel deze aanpak vaak noodzakelijk wordt geacht, doet het de leesbaarheid van een wiskundige tekst weinig goeds. Zoals je misschien al hebt gemerkt, heb ik voor deze samenvatting (en voor hoofdstuk 1) gekozen voor een andere stijl. Ik denk dat het noodzakelijk is om, als je wilt dat je ideeën kunnen worden begrepen door een groter publiek, deze ideeën over te brengen in een tekst die toegankelijk is voor de niet-wiskundige, niet-wetenschappelijke lezer – het gevaar 'niet wetenschappelijk genoeg' te zijn, neem ik op de koop toe.
Soms is het onvermijdelijk een objectieve stijl te gebruiken, vanwege het onderwerp dat wordt behandeld. Dit is vooral het geval in het tweede deel van hoofdstuk 1, 'Methoden' (sectie 1.3), waarvan alleen een Engelse versie bestaat. Op het moment dat in hoofdstuk 2 de 'echte' inhoud begint, wordt het pas echt aanpoten: op dat moment verandert de stijl van de directe, subjectieve stijl van het inleidende hoofdstuk 1 naar een objectieve en wat indirecte 'wiskundige' stijl. Dit is dus een noodzakelijke eigenschap van wiskundige teksten op onderzoeksniveau.

Tekst is niet alles. Ik heb als wiskundige gemerkt dat dieper inzicht in een fenomeen door middel van symboolmanipulatie samengaat met de vorming van een bepaald beeld, een bepaalde voorstelling. Omdat de objecten waarmee je werkt vaak abstract zijn, kan deze voorstelling hoogstens ongeveer kloppen.

Ik prijs mezelf in dat opzicht gelukkig dat ik een toegepast wiskundige ben. Ik ben vaker dan in onderzoekers andere, meer fundamentele takken van de wiskunde in de gelegenheid om de objecten die ik onderzoek daadwerkelijk te laten zien zoals ze zijn. Waar in het overmatig gebruik van symbolen het gevaar schuilt dat de analyse onoverzichtelijk wordt, komt het gebruik van afbeeldingen het begrip ten goede. Een van mijn doelen is daarom de lezer een idee geven wat de afbeeldingen in dit proefschrift betekenen. Als je bij het doorbladeren van de wiskunde-hoofdstukken een afbeelding tegenkomt en denkt 'Hee! Ik heb zoiets eerder gezien, zou het met elkaar te maken kunnen hebben?', dan is dat doel bereikt.

Deze samenvatting is hoofdzakelijk geschreven op basis van de gedachte dat, als je een proefschrift in de kast hebt staan, je ten minste in staat moet zijn de titel te begrijpen. Daarvoor moeten eerst een paar concepten worden uitgelegd: dit is het onderwerp van de nu volgende sectie. De woorden waaruit de titel bestaat worden gaandeweg geïntroduceerd. Zoals gezegd is deze samenvatting, die qua inhoud samenvalt met sectie 1.2, speciaal bedoeld voor niet-wiskundigen, zelfs voor niet-wetenschappers. Zoals je kunt zien als je door deze samenvatting bladert, zijn er niet zoveel formules als je in een wiskundeproefschrift zou verwachten, in het bijzonder ten opzichte van de hoofdstukken 2, 3 en 4, waar de 'echte' wiskunde te vinden is.
Mocht je na het lezen van de samenvatting de smaak te pakken hebben en benieuwd zijn naar het onderzoek in dit proefschrift, lees dan vooral hoofdstuk 1, in het bijzonder sectie 1.3. Daar ga ik wat verder in op wat het onderzoek dat heeft geleid tot dit proefschrift eigenlijk inhoudt, en wat de resultaten zijn. Ook maak ik duidelijk wat er nieuw is aan deze resultaten, en waarom ze van belang zijn. Tenslotte geef ik in sectie 1.4 een overzicht van de inhoud van dit proefschrift.

Wat betekent de titel?

Patronen

Wat is een patroon? Je zou, in de ruimste zin van het woord, een patroon kunnen kenschetsen als een 'waarneembare regelmaat'. In de natuur struikel je bijna over de patronen. De meest voor de hand liggende patronen zijn vlekken en strepen op dierenvacht, zoals op zebra's, luipaarden, katten en jonge everzwijnen; ingewikkelder patronen komen ook voor, zoals vingerafdrukken, zeeschelpen of slakkenhuizen. Wanneer je op zoek gaat naar patronen, 'daar is iets, dan niets meer, dan weer iets, etc.', vind je ze overal. Neem een boom: zijn takken, de twijgen aan de takken, bladeren aan de twijgen hebben allemaal min of meer dezelfde onderlinge afstand – zelfs de nerven in de bladeren hebben een vertakkingsstructuur. Op grotere schaal zijn patronen ook alomtegenwoordig, zelfs op dorre plaatsen als de woestijn: denk aan golfpatronen in het zand, of zelfs zandduinen die zelf patronen vormen. Aan de rand van de woestijn groeit de daar aanwezige vegetatie in streep- en vlekpatronen. Zulke patronen kun je ook zien in de lucht, gevormd door wolken; zie Figuur 1.1 voor voorbeelden van patronen in de natuur.

In al deze patronen wordt iets herhaald: ze worden gekarakteriseerd door de herhaling van een bepaald element. De natuur staat bol van zichzelf herhalende processen: de dagelijkse opkomst en ondergang van de zon, de getijden, de fasen van de maan, de seizoenswisselingen. Hoewel je geneigd bent deze fenomenen ook 'patronen' te noemen (en dat zijn ze in een bepaalde zin natuurlijk ook), heeft de regelmaat in deze gevallen betrekking tot iets in de *tijd* en niet zozeer tot iets in de *plaats*. Dit is wat ze onderscheidt van de eerder genoemde patronen: wat wiskundigen een 'patroon' noemen is dan ook een *ruimtelijk* patroon, en daartoe zullen we ons vanaf nu beperken. Dat betekent natuurlijk niet dat verandering (in de tijd) geen rol speelt – integendeel. De 'dynamica van patronen' is een belangrijk onderwerp, waarop in sectie 1.3, hoofdstuk 1 verder wordt ingegaan.

Een patroon kan, zoals al eerder genoemd, worden gekarakteriseerd door de regelmatige terugkeer van een bepaald basiselement, zoals een vlek, een streep, een twijg, een golf, een blad, enzovoort. Dit proefschrift gaat over precies zo'n basiselement, namelijk een '***puls***'. Deze puls kan gezien worden als bouwsteen voor ingewikkelder patronen, zie Figuur 1.2. Het ligt voor de hand om, als eerste stap, de bouwstenen van een patroon te bestuderen. Op het moment dat je dingen te weten bent gekomen over deze bouwsteen kun je vragen over het totale patroon proberen te beantwoorden, door te kijken hoe dit basiselement zichzelf herhaalt. Dit laatste valt echter buiten het bestek van dit proefschrift.

Bij het bestuderen van een patroon zijn er een paar 'natuurlijke' vragen die je zou willen beantwoorden: Wat is het zichzelf herhalende basiselement? En hoe wordt het herhaald? Beide vragen zijn relevant binnen het meer overkoepelende vraagstuk over hoe een patroon wordt gevormd. Het onderzoek dat heeft geleid tot dit proefschrift valt daarom natuurlijkerwijs binnen het wiskundig onderzoeksgebied van 'patroonvorming', en daarbinnen in het onderzoek naar 'gelokaliseerde structuren'. De eerder genoemde puls is een voorbeeld van zo'n gelokaliseerde structuur.
Het basiselement, of de gelokaliseerde structuur, kan afhankelijk van het patroon in

kwestie meer of minder interessant zijn. Bij een vingerafdruk is het spiraalvormige patroon veel belangrijker dan de kanaaltjes die het patroon vormen, in het bijzonder in forensisch onderzoek. In plantgroei zijn de basiselementen (bladeren, twijgen) veel interessanter. Een voorbeeld dat daarmee te maken heeft is de ontwikkeling van ledematen in een embryo, die bestudeerd kan worden in de context van patroonvorming: hier staan de gelokaliseerde structuren (een arm, vingers) centraal. Het proces dat een groeiend organisme zijn vorm laat ontwikkelen, morphogenese, kan daarom in de wiskundige context van patroonvorming bestudeerd worden – en dit is slechts één van de vele toepassingen van patroonvorming als wiskundig onderzoeksgebied.

Dynamische systemen

De wiskundige technieken die in dit proefschrift zijn gebruikt vinden hun oorsprong in het vakgebied van dynamische systemen, in het bijzonder dat van differentiaalvergelijkingen. Het is goed mogelijk om, zonder direct in de wiskunde te duiken, een idee te geven hoe dynamische systemen werken, en welke ideeën in het onderzoek naar patroonvorming gebruikt kunnen worden.

Een dynamisch systeem beschrijft hoe een bepaalde grootheid verandert, waarbij die verandering wordt gestuurd door een aantal voorschriften. Denk bijvoorbeeld aan de positie van de aarde terwijl zij om de zon cirkelt, de concentratie van chemicaliën als je deze samenvoegt en met elkaar laat reageren, of de massa van een groeiende bacteriekolonie. De regels die hier de verandering sturen zijn respectievelijk de wetten van de zwaartekracht, de chemische reacties tussen de chemicaliën en de manier waarop bacteriën voedsel en/of zuurstof gebruiken om te groeien. Dit soort regels kunnen worden gegeven in de vorm van zogenaamde evolutievergelijkingen. Een evolutievergelijking omschrijft hoe een gegeven begintoestand (een beginpositie, een beginconcentratie) evolueert naarmate de tijd verstrijkt. Hoe zoiets er ‘in abstracto’ uit zou kunnen zien, is te zien in Figuur 1.3.
Zo’n evolutievergelijking is wiskundig gezien een differentiaalvergelijking. Een evolutievergelijking voor een bepaalde grootheid ϕ is daarom een vergelijking voor zijn tijdsafgeleide $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi$, ofwel de verandering van ϕ op een bepaald moment in de tijd:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi = \text{iets (dat afhangt van } \phi \text{ en/of } t\text{).}$$

Het symbool ϕ staat hier voor wat het ook is dat de evolutievergelijking zou moeten omschrijven, bijvoorbeeld temperatuur, een populatie van een bepaalde diersoort, of de concentratie van een chemische stof.

Het ‘iets’-gedeelte is natuurlijk waar al de interessante informatie zit. Op het moment dat je een keuze maakt wat je precies op de ‘iets’-plaats invult, kies je ervoor een bepaald gedrag voor te schrijven, en op die manier leg je de evolutie van ϕ vast. Als je iets anders invult, ofwel andere evolutieregels voorschrijft, zal ϕ ook ander dynamisch gedrag gaan vertonen – het is zelfs zo dat kleine veranderingen in dit opzicht grote gevolgen kunnen hebben, zoals we zullen zien in de sectie ‘Verstoringen’.

Evolutievergelijkingen worden gebruikt om bepaalde natuurlijke fenomenen waar de tijdsevolutie van bepaalde grootheden een rol speelt te modelleren, bijvoorbeeld om de groei en afname van populaties te omschrijven. Vaak is het nodig om in het model te kunnen beschrijven hoe de grootheid in kwestie is verspreid, in ruimtelijke zin. Als de evolutie van een grootheid ook afhangt van de manier waarop deze is verspreid, dan speelt de ruimtelijke variable x een belangrijke rol in de evolutievergelijking die zo’n proces beschrijft. De tijdsevolutie van zo’n grootheid ϕ zal van x afhangen, en op zijn ruimtelijke afgeleiden $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi$ en $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\phi$. Zo’n model ziet er daarom als volgt uit:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi = \text{iets dat afhangt van } \phi,\ \frac{\partial}{\partial x}\phi,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi, \text{ x en/of t.}$$

Het is je misschien opgevallen dat er iets veranderd is aan de manier waarop de afgeleiden worden weergeven: we gebruiken hier ‘∂’ in plaats van ‘d’. Deze notatie wordt over het algemeen gebruikt om te benadrukken dat de grootheid ϕ van twee variabelen afhangt, in dit geval van zowel x als van t: je kunt ook zeggen dat ϕ een functie is van x en t. Om het overzichtelijk te houden beperken we ons hier tot één ruimtelijke variabele x: je hebt er meer nodig als het voor het fenomeen in kwestie handig is om te omschrijven hoe de grootheid ϕ zich verspreidt in de lengte, breedte en/of hoogte. De gekozen aanpak is vaak volledig hetzelfde als in het geval van één ruimtelijke variabele.

Reactie-diffusievergelijkingen vormen een belangrijke klasse evolutievergelijkingen waar de ruimtelijke spreiding de evolutie beïnvloedt. In deze reactie-diffusievergelijkingen is er een duidelijk onderscheid tussen de rol van de ruimtelijke afgeleiden van ϕ ($\frac{\partial}{\partial x}\phi$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi$, enz.) en die van de andere termen. Reactie-diffusievergelijkingen zien er (daarom) als volgt uit:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + \text{iets dat afhangt van } \phi.$$

Aan de hand van deze structuur kan duidelijk worden gemaakt waar de naam ‘reactie-diffusie’ vandaan komt. De term ‘diffusie’ betekent ‘het verspreiden door de ruimte’:

denk aan een scheutje melk in een kop koffie, waarbij de melk zich (ook zonder te roeren) door de koffie verspreidt. Een ander alledaags voorbeeld is warmtegeleiding: als je een pan op het vuur zet, verspreidt de warmte zich door de pan (en, niet onbelangrijk, door de inhoud van de pan) door middel van diffusie (zie Figuur 1.4). Wiskundig gezien kun je diffusie het meest recht-toe-recht-aan modelleren met de tweede ruimtelijke afgeleide, in dit geval $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi$. Deze term in de reactie-diffusievergelijking schrijft voor hoe de grootheid ϕ zich verspreidt door de ruimte terwijl zij evolueert in de tijd.
De overige termen, 'iets dat afhangt van ϕ', worden de reactietermen genoemd. De reden voor het gebruik van deze term is het duidelijkst als we niet één, maar twee reactie-diffusievergelijkingen bekijken – met andere woorden, een 'reactie-diffusiesysteem'. Een voorbeeld hiervan is het Gierer-Meinhardtsysteem [22], dat de evolutie van de grootheden U en V beschrijft:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}U &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}U + V^2 - U \\
\frac{\partial}{\partial t}V &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}V + \frac{V^2}{U} - V
\end{aligned}$$

Het is duidelijk te zien dat de evolutie van U, beschreven in de bovenste vergelijking, wordt beïnvloed door de waarde van V door de aanwezigheid van de term V^2. Vice versa heeft de onderste vergelijking, waar de evolutie van V wordt beschreven, een term die afhangt van U, namelijk $\frac{V^2}{U}$. Deze wederzijdse afhankelijkheid kun je interpreteren als een reactie tussen U en V, wat de terminologie 'reactietermen' verklaart.

Reactie-diffusievergelijkingen kunnen daarom worden gekarakteriseerd als evolutievergelijkingen die de ruimtelijke spreiding van, en de interactie tussen verschillende grootheden omschrijven.

Patronen in reactie-diffusiesystemen

In fenomenen die beschreven worden door reactie-diffusievergelijkingen komen regelmatig allerlei soorten patronen voor. Dit is geen toeval: het verschijnen van iets dat op een patroon lijkt is voor onderzoekers vaak de aanleiding om te proberen het fenomeen in kwestie te modelleren met reactie-diffusievergelijkingen. Alan Turing –wereldberoemd door onder andere zijn bijdrage aan het ontcijferen van de Enigmacode, zie Figuur 1.5– was de eerste die liet zien hoe en waarom patronen op een natuurlijke manier kunnen ontstaan in systemen van reactie-diffusievergelijkingen. Pa-

tronen die op deze manier ontstaan worden dan ook vaak Turingpatronen genoemd.
Het mechanisme dat zorgt voor het ontstaan van een Turingpatroon wordt meestal beschreven aan de hand van een zogenaamd activator-inhibitorpaar. Dit is een paar (chemische) stoffen waarvan de één (de activator) beide laat groeien, terwijl de ander (de inhibitor) de groei van beide stoffen probeert af te remmen. Deze beschrijving van groei en afremming kan door de reactietermen in een reactie-diffusievergelijking worden gemodelleerd. Turing ontdekte dat als de inhibitor zichzelf veel makkelijker door de ruimte verspreidt dan de activator, er een soort terugkoppelingsmechanisme ontstaat. Dit terugkoppelingsmechanisme zorgt ervoor dat de activator en de inhibitor zich niet gelijkmatig verspreiden: hun concentratie fluctueert op een regelmatige manier van plaats tot plaats, en op die manier vormt zich een patroon.
Over het algemeen wordt aangenomen dat dit activator-inhibitormechanisme, dat gemodelleerd kan worden door een reactie-diffusiesysteem, de oorzaak is van een groot aantal patronen die voorkomen in de natuur, zoals vlekken en strepen op dierenvacht of vegetatiepatronen aan de rand van de woestijn. In Figuur 1.6 zie je een aantal voorbeelden van mogelijke patronen in een specifiek reactie-diffusiesysteem (het Gray-Scottmodel).

Wat is een patroon? In de context van reactie-diffusievergelijkingen zou je kunnen zeggen dat een patroon iets is met een duidelijke ruimtelijke structuur, iets wat dus op een specifieke manier van de ruimtelijke variabele x afhangt. Bovendien ligt het voor de hand om te eisen dat een patroon niet of nauwelijks zou moeten veranderen in de tijd. Deze laatste eis is echter nogal beperkend. Er zijn genoeg voorbeelden van dingen die je zeker een 'patroon' zou willen noemen, maar die toch bewegen. Denk bijvoorbeeld aan lopende golven, zoals watergolven, radiogolven, of licht: deze hebben een duidelijke (ruimtelijk) periodieke structuur, maar ze bewegen ook in een bepaalde richting. Je kunt natuurlijk zeggen dat, als je meebeweegt met de golf, dat deze stil lijkt te staan –en dat is precies hoe zulke lopende golven in het algemeen worden beschreven– maar dat verandert niets aan het feit dat deze golven bewegen.
Er zitten een paar belangrijke voordelen aan je beperken tot stationaire, stilstaande patronen: omdat het patroon dat je zoekt niet afhangt van de tijd, kun je je voorstellen dat de analyse in de context van reactie-diffusievergelijkingen een stuk eenvoudiger wordt. Er is geen wederzijdse beïnvloeding tussen de ruimtelijke en tijdelijke variatie van het patroon: het patroon evolueert niet. Je kunt dit ook zien als startpunt van de analyse van patronen die wél veranderen als de tijd verstrijkt. Je kunt vragen gaan stellen als 'Als ik de omstandigheden verander, zal het patroon dat ik gevonden heb ook gaan veranderen? Zal het gaan bewegen? Zal de vorm veranderen?' Op dit soort vragen wordt in sectie 1.3.3 verder ingegaan.

Kort samengevat kan de zoektocht naar een patroon in een reactie-diffusiemodel beginnen met het vinden van een stationaire, tijdsonafhankelijke oplossing van het reactie-diffusiesysteem, met een specifieke ruimtelijke structuur. En dat is precies waar een deel van dit proefschrift over gaat: het vinden van patronen (in het bijzonder, pulsen) in reactie-diffusiesystemen.

Verstoringen

We gaan een experimentje doen. We zijn benieuwd wat er gebeurt met een bal die we laten vallen vanaf een bepaalde hoogte, zeg 2 meter. We kunnen bijvoorbeeld meten hoe lang het duurt voordat de bal de grond raakt. Je kunt je voorstellen dat, als je dit experiment meerdere keren uitvoert, je niet iedere keer hetzelfde antwoord krijgt. Deze variatie in meetresultaten kan meerdere oorzaken hebben: misschien liet je de bal niet iedere keer vanaf precies dezelfde hoogte vallen, misschien was je niet iedere keer even op tijd met je stopwatch. Deze dingen hebben te maken met de feilbaarheid van degene die het experiment uitvoert: natuurlijk heeft jouw eigen onnauwkeurigheid geen invloed op het daadwerkelijke fenomeen van het vallen van de bal. Omdat dit tot nu toe toch een gedachtenexperiment is, nemen we vanaf nu aan dat je in staat bent om de valtijd van de bal precies te meten.
Dan nog zul je niet steeds dezelfde meetresultaten krijgen. Misschien werd de bal een beetje opzij geblazen door de wind, misschien was de grond niet helemaal vlak, misschien is de luchtdruk ondertussen een beetje veranderd, of de luchtvochtigheid, waardoor de luchtweerstand is veranderd; misschien is er een klein stofje aan de bal gaan kleven, waardoor zijn gewicht is veranderd, misschien kruisde de bal op weg naar beneden het pad van een nietsvermoedende vlieg, waardoor de bal iets afremde. Dit zijn oorzaken die je niet kunt controleren, maar die wel invloed kunnen hebben op de meetresultaten. Natuurlijk kun je daar tegenin brengen dat als je hetzelfde experiment vaak herhaalt in een goed beschermde en gecontroleerde omgeving, je de invloed van zulke verstoringen minimaliseert en hun netto effect uit zal middelen. Uiteindelijk zou het, om het fenomeen van de vallende bal te beschrijven, niet uit moeten maken wie het experiment uitvoert, of hoe laat het is, of het regent of niet, of ik het experiment uitvoer in Oslo of in Jakarta – maar wacht eens even. Dat laatste maakt *wel* uit, al is het maar een beetje. Sinds Newton weten we dat de bal valt door de wederzijdse aantrekkingskracht tussen de bal en de aarde. Als je de gravitationele versnelling op verschillende plaatsen op aarde meet (bijvoorbeeld door een bal te laten vallen), zul je zien dat deze gravitationele versnelling g van plaats tot plaats verschilt. Bij benadering is $g = 9.8$ m/s^2; in Oslo geldt dat $g_{\text{Oslo}} = 9.825$ m/s^2, terwijl in Jakarta $g_{\text{Jakarta}} = 9.777$ m/s^2. Alle andere dingen die de vallende bal beïnvloedden

waren willekeurig en hadden niets te maken met de natuurkundige achtergrond van het fenomeen van de vallende bal. Met de plaats op aarde waar het experiment wordt uitgevoerd introduceren we een kleine, maar systematische verandering in de meetgegevens.

Als een onderzoeker een natuurlijk fenomeen bestudeert probeert hij of zij vast te stellen welke processen of wetten werkelijk ten grondslag liggen aan het fenomeen, en welke processen ruis introduceren en zo de metingen alleen maar verstoren. Als je een model voor de vallende bal op zou schrijven in de vorm van een vergelijking, zou je dingen als hoe laat het is of welke kleur je ogen hebben niet in het model stoppen, omdat je weet dat dit soort dingen geen invloed hebben. Je zou ook de aanwezigheid van wind of de luchtvochtigheid niet mee laten wegen, omdat je weet dat die niet te maken hebben met de fundamentele oorzaken van de vallende bal. Hoewel ze de beweging van de bal een beetje kunnen beïnvloeden, is dat niet waarin je uiteindelijk geïnteresseerd bent. Met andere woorden, je wil je model (je vergelijking, je natuurwet) zo eenvoudig, zo zuiver mogelijk hebben. Dat is één van de redenen waarom het zo moeilijk is als wetenschapper een goed model op te schrijven: je hebt een hoop kennis over en ervaring met het te bestuderen fenomeen nodig om te kunnen beoordelen welke processen werkelijk invloed hebben op het fenomeen dat je wilt beschrijven.
In het geval van de vallende bal kunnen we met behulp van de tweede wet van Newton een formule opschrijven, die alleen maar afhangt van de zwaartekracht. Als we de valtijd t noemen en de gravitationele versnelling g, dan krijgen we (voor een valhoogte van 2 meter, waarbij we de eenheden even vergeten):

$$t = \frac{2}{\sqrt{g}}$$

Omdat de waarde van de gravitationele versnelling van plaats tot plaats verandert, verschilt de valtijd ook van plaats tot plaats. Als we alleen maar de valtijd ongeveer zouden willen weten, zouden we altijd de 'benaderde' waarde van g kunnen gebruiken; zelfs al is dit niet de 'echte' waarde van g (en geeft daarom niet de echte waarde van t), het zit er toch niet ver vanaf. Als we de gemiddelde waarde $g_{\text{gemiddeld}} = 9.81$ m/s^2 gebruiken, krijgen we $t_{\text{gemiddeld}} = 0.64$s. Nu kunnen we de daadwerkelijke waarden van de gravitationele acceleratie in Oslo en Jakarta vergelijkigen met de gemiddelde waarde: $g_{\text{Oslo}} = g_{\text{gemiddeld}} + 0.015$ m/s^2 en $g_{\text{Jakarta}} = g_{\text{gemiddeld}} - 0.033$ m/s^2. Op deze manier kunnen we de gravitationele accelaratie waar dan ook op aarde schrijven als $g = g_{\text{gemiddeld}} + \varepsilon$, waar de waarde van ε afhangt van waar je bent. Bovendien is ε behoorlijk klein ten opzichte van $g_{\text{gemiddeld}}$, zoals we hebben gezien. Als we dit nieuwe gegeven invullen in onze formule voor de valtijd, krijgen we

$$t = \frac{2}{\sqrt{g_{\text{gemiddeld}} + \varepsilon}}$$

Deze formule, die de valtijd van een bal losgelaten op 2 meter hoogte waar dan ook op aarde beschrijft, is een voorbeeld van een model met een ***verstoring***. Op deze manier kun je direct een aantal karakteristieke aspecten van het vallende bal-fenomeen aflezen. Als je bijvoorbeeld de kleine variaties in de waarde van g verwaarloost door $\varepsilon = 0$ te kiezen, kun je direct zien hoe je de benaderde, gemiddelde valtijd $t_{\text{gemiddeld}}$ uitrekent, namelijk als

$$t_{\text{gemiddeld}} = \frac{2}{\sqrt{g_{\text{gemiddeld}}}}$$

Bovendien kun je afleiden dat, zolang de verstoring ε klein blijft, de valtijd niet veel van de gemiddelde valtijd zal verschillen, zie Figuur 1.7. Deze laatste eigenschap, dat kleine veranderingen in het model een kleine invloed op de uitkomsten hebben, is de definiërende eigenschap van zogenaamde *reguliere* verstoringen.

Voor ***singuliere verstoringen*** geldt het tegenovergestelde: hier kunnen kleine verstoringen in het model een grote invloed hebben op de grootheden die door het model worden beschreven. Dit klinkt tegenstrijdig, maar er zijn alledaagse voorbeelden waar singuliere verstoringen een belangrijke rol spelen.
Singuliere verstoringen hebben bijna altijd te maken met plotselinge veranderingen, of snelle overgangen. Warmtegeleiding is een goed voorbeeld hiervan: we zijn warmtegeleiding al eerder tegengekomen, als illustratie van de term ‘diffusie’.
Als je een pan op het vuur zet, verspreidt de warmte van het fornuis zich heel snel door metaal van de pan: dit metaal is een goed warmtegeleider. Als de pan van porselein zou zijn, zou er iets compleet anders gebeuren: omdat keramische materialen goede hitte-isolatoren zijn, zou de pan erg langzaam opwarmen, omdat de warmte van het fornuis zich nauwelijks door de pan zou verspreiden. Het verschil tussen een metalen en een porseleinen pan in termen van warmtegeleiding is duidelijk zichtbaar als je Figuren 1.8 en 1.9 met elkaar vergelijkt. In het porselein is de verwarmde plek in het midden niet zo uitgespreid als in het metaal. Er is daarom een scherpe overgang zichtbaar tussen de verwarmde plek en zijn omgeving: aan de rand van de plek die wordt verwarmd is er een plotselinge temperatuurdaling. Als we het model dat warmtegeleiding in verschillende materialen beschrijft beter bekijken, wordt duidelijk waarom dit fenomeen alles te maken heeft met singuliere verstoringen.

Warmte verspreidt zich door materialen door middel van diffusie. De manier waarop warmte zich door een materiaal verspreidt kan worden beschreven door een heel eenvoudige evolutievergelijking, beter bekend als de 'warmtevergelijking':

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi$$

In dit geval is ϕ de temperatuur op een bepaalde plaats in het materiaal, op een bepaald moment. De warmtevergelijking is een hele basale reactie-diffusievergelijking, of eigenlijk alleen maar een diffusievergelijking omdat er geen reactietermen in voorkomen (zie de vorige sectie). De letter α is de warmtegeleidingscoëfficient: het is een constante die afhangt van het materiaal dat je bekijkt. Een materiaal dat warmte slecht geleidt heeft een heel kleine warmtegeleidingscoëfficient.
Laten we, om aan te sluiten bij het vorige voorbeeld, deze kleine warmtegeleidingscoëfficient 'ε' noemen, zodat de warmtevergelijking voor een heel goed isolerend materiaal er als volgt uitziet:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi$$

Net zoals in het voorbeeld van de vallende bal kun je je afvragen wat er gebeurt als we de kleine ε-term verwaarlozen, ofwel $\varepsilon = 0$ kiezen. In dit geval leidt dit tot een drastische versimpeling van de warmtevergelijking. We houden de volgende vergelijking over:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0$$

Met andere woorden: de temperatuur verandert niet. Dat betekent dat de overgang van de verwarmde plek naar zijn omgeving echt een abrupte overgang is: de verwarmde plek blijft warm, omdat het omringende isolerende materiaal de warmte op haar plek houdt. Het materiaal in de omgeving warmt niet op, en blijft dus koud. Natuurlijk is dit niet helemaal realistisch: in het echt zal de warmte zich langzaam verspreiden, en de verwarmde plek zal langzaam afkoelen. Toch geeft deze zogenaamde 'singuliere limiet' een behoorlijk goede omschrijving van wat er in het echt zal gebeuren – zolang je er even niet over nadenkt of een perfect isolerend materiaal wel zou kunnen bestaan.
De limiet $\varepsilon = 0$ wordt 'singulier' genoemd omdat het een onderdeel van het model weggooit dat cruciaal is voor de beschrijving van het fenomeen in kwestie, in dit geval warmtediffusie. Deze neiging van singuliere limieten om zich te ontdoen van termen die een belangrijke rol spelen, is iets dat zich regelmatig voordoet in het onderzoek naar singuliere verstoringen. De onderzoeker kan hier vaak zijn of haar voordeel mee doen, omdat het tot gevolg heeft dat het model een stuk eenvoudiger

wordt. Je kunt het zien als een soort compromis: in de singuliere limiet, als je $\varepsilon = 0$ kiest, wordt het opeens mogelijk om bepaalde vergelijkingen op te lossen omdat het aanvankelijk complexe systeem behoorlijk is versimpeld. Aan de andere kant heb je ook een hoop informatie weggegooid: het is vaak onduidelijk hoe je de resultaten die behaald zijn in de singuliere limiet kunt vertalen naar het geval dat ε niet nul is (maar wel heel klein). In het bovenstaande voorbeeld over warmtegeleiding wisten we al hoe de 'volledige' vergelijking zich gedroeg, omdat we het fenomeen dat werd beschreven snapten: op basis daarvan konden we de resultaten van de singuliere limiet interpreteren. In andere toepassingen is dit vaak niet zo eenvoudig.

We hebben gezien dat er, in het geval van zeer trage warmtegeleiding, een scherpe overgang in temperatuur is tussen de verwarmde plek en zijn omgeving. In het echt is deze overgang niet zo plotseling als in de singuliere limiet, maar de overgang is wel heel snel. Om beter te begrijpen wat er in deze overgang gebeurt is het een goed idee om in te zoomen op het gebied waar de overgang plaatsvindt. Als je dat doet, zul je een geleidelijke overgang zien van hoge naar lage temperatuur – maar wel geleidelijk op een erg kleine lengteschaal. Je zou de temperatuurverdeling in een porseleinen pan het best als volgt kunnen beschrijven:

1. Begin ver weg van de verwarmde plek, waar de temperatuur laag is. Als je in de richting van de verwarmde plek begint te 'lopen', verandert er weinig: de temperatuur blijft hetzelfde.

2. Plotseling maakt de temperatuur een grote sprong: je bent nu aan de rand van de verwarmde plek. Als je nauwkeuriger wil zien wat hier gebeurt, zul je even pas op de plaats moeten maken en moeten inzoomen op het overgangsgebied. Je zult zien dat de temperatuur op deze kleine lengteschaal geleidelijk toeneemt.

3. Na de sprong ben je beland in het verwarmde gebied. Hier verandert er weer weinig: overal is min of meer dezelfde (hoge) temperatuur.

Een situatie waarin er een schaalverschil optreedt, en waar het dus het handigste is om sommige gebieden op een andere (kleinere) schaal te bekijken dan andere gebieden, is typisch voor een model met singuliere verstoringen. In zulke situaties is de algemene aanpak dus om het probleem op verschillende schalen te bekijken, en de resultaten van deze afzonderlijke analyses aan elkaar te plakken om zo een totaalbeeld te krijgen. Deze aanpak wordt in sectie 1.3.1 in meer detail toegelicht.

Waar gaat dit proefschrift over?

Inmiddels zijn we genoeg te weten gekomen om de titel van dit proefschrift te begrijpen: ‘Pulsen in singulier verstoorde reactie-diffusiesystemen’. Dit proefschrift gaat over de analyse van een bepaald specifiek patroon, namelijk een puls, in de context van een bepaalde klasse modellen, namelijk reactie-diffusiesystemen. Bovendien hebben deze reactie-diffusiesystemen een belangrijke, zeer bruikbare eigenschap: ze zijn singulier verstoord. Wat deze afzonderlijke termen betekenen, is uitgelegd in de voorgaande secties.

Zoals ik al heb gezegd aan het begin van deze samenvatting: mocht je benieuwd zijn naar de onderzoekstechnieken die zijn gebruikt in dit proefschrift, en vraag je je af hoe je de analyse van zo’n puls eigenlijk aanpakt, lees dan verder in hoofdstuk 1. De inhoud van het eerste deel komt overeen met deze samenvatting, maar vanaf sectie 1.3 begint er iets nieuws. Als de overgang van Nederlands naar Engels een probleem is, zal het ongetwijfeld helpen af en toe terug te bladeren naar deze samenvatting.