



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Discrete tomography with two directions

Dalen, B.E. van

Citation

Dalen, B. E. van. (2011, September 20). *Discrete tomography with two directions*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/17845>

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [Leiden University Non-exclusive license](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/17845>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Stellingen

behorende bij het proefschrift
Discrete tomography with two directions
 van Birgit van Dalen

In stellingen 1 tot en met 4 bekijken we rechthoeken $\{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ waarvan elk punt (i, j) ofwel waarde 0 ofwel waarde 1 heeft. We identificeren de invulling van zo'n rechthoek met een verzameling F die bestaat uit alle punten in deze rechthoek met waarde 1.

Gegeven zijn rijssommen $\mathcal{R} = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ en kolomsommen $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, zodat $n \geq r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_m \geq 1$ en $m \geq c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n \geq 1$ en zodat $\sum_{i=1}^m r_i = \sum_{j=1}^n c_j$. We zeggen dat een verzameling F aan deze lijnsommen voldoet als voor $1 \leq i \leq m$ het aantal elementen van F in rij i (dus $\#\{(i, j) \in F : 1 \leq j \leq n\}$) precies r_i is, en voor $1 \leq j \leq n$ het aantal elementen van F in kolom j precies c_j . Als er voor gegeven lijnsommen minstens één verzameling F is die aan de lijnsommen voldoet, dan zeggen we dat de lijnsommen consistent zijn. Als er precies één verzameling F is die aan de lijnsommen voldoet, dan zeggen we dat de lijnsommen F uniek vastleggen.

We definiëren verder $a_j = \#\{i : r_i \geq j\}$ voor $j = 1, 2, \dots, n$ en $b_i = \#\{j : c_j \geq i\}$ voor $i = 1, 2, \dots, m$. Zij $\alpha = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |a_j - c_j|$.

1. Neem aan dat de lijnsommen $(\mathcal{R}, \mathcal{C})$ consistent zijn, maar niet een verzameling F uniek vastleggen. Zij k maximaal zodat $a_k > c_k$ en zij l maximaal zodat $b_l > r_l$. Als geldt

- $a_1 - c_1 \geq a_2 - c_2 \geq \dots \geq a_k - c_k$,
- $b_1 - r_1 \geq b_2 - r_2 \geq \dots \geq b_l - r_l$, en
- $a_j - c_j = \#\{i : b_i - r_i \geq j\}$ voor $1 \leq j \leq k$,

dan bestaat er een hv-convexe verzameling F met lijnsommen $(\mathcal{R}, \mathcal{C})$. (Een verzameling F heet hv-convex als de elementen van F in elke rij en in elke kolom aaneengesloten zijn.)

2. Zij $S = \sum_{i=1}^m r_i = \sum_{j=1}^n c_j$. Laat $Z \subset \{(i, j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ een verzameling voorgeschreven nullen zijn, zodat in elke rij en in elke kolom hoogstens één element van Z zit. Definieer $z_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{als } (i, j) \in Z, \\ 1 & \text{als } (i, j) \notin Z. \end{cases}$ Dan bestaat er een verzameling F met lijnsommen $(\mathcal{R}, \mathcal{C})$ waarvoor $F \cap Z = \emptyset$ dan en slechts dan als voor $1 \leq k \leq m$ geldt:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{b_k} z_{ij} \geq \sum_{i=1}^k r_i + \sum_{j=1}^{b_k} c_j - S.$$

3. Neem aan dat de lijnsommen $(\mathcal{R}, \mathcal{C})$ consistent zijn. Dan kunnen we α enen en nullen voorschrijven op zo'n manier dat F uniek vast wordt gelegd. Oftewel: dan bestaat er een verzameling $Z \subset \{(i, j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ van voorgeschreven nullen en een verzameling $W \subset \{(i, j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ van voorgeschreven enen met $|Z \cup W| = \alpha$, zodat er precies één verzameling F bestaat die aan de lijnsommen $(\mathcal{R}, \mathcal{C})$ voldoet en waarvoor geldt $F \cap Z = \emptyset$ en $W \subset F$.
4. Het is onmogelijk om met minder dan α voorgeschreven enen en nullen F uniek vast te leggen.

5. Een functie $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ voldoet aan

$$\frac{y}{y+1} \cdot f\left(\frac{x}{y} + 1\right) = \frac{x}{y} \cdot f\left(\frac{1}{y+1}\right) \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ en } y \in \mathbb{R}_{>0},$$

dan en slechts dan als

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x) & \text{voor } x < 1, \\ c(x-1) & \text{voor } x \geq 1, \end{cases}$$

voor zekere $c \in \mathbb{R}_{>0}$.

6. Bekijk een verzameling $T = \{A_1, A_2, \dots, A_{2n}\}$ van $2n$ elementen, waarbij $n \geq 3$. Voor $i = 1, 2, \dots, k$ maken we een partitie $(S_1(i), S_2(i))$ van T , zodat $S_1(i)$ het element A_1 bevat en precies $n-1$ andere elementen en $S_2(i)$ het element A_2 bevat en precies $n-1$ andere elementen. We noemen zo'n rij van partities *goed* als er voor elk paar $\{p, q\}$ met $\{p, q\} \neq \{1, 2\}$ een i bestaat zodat A_p en A_q beide in $S_1(i)$ of beide in $S_2(i)$ zitten. Voor $k = 3$ bestaat er voor geen enkele $n \geq 3$ een goede rij van partities. Voor $k = 4$ bestaat er voor alle $n \geq 3$ een goede rij van partities.

(Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade 2009)

7. Zij de functie $f : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3$ gedefinieerd door

$$f(x, y, z) = (x^2 + y, y^2 + z, z^2 + x).$$

Deze functie is “bijna injectief” in de volgende zin:

- Enerzijds geldt dat als a, b en c verschillende gehele getallen zijn, er hoogstens één drietel $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ is waarvoor geldt $f(x, y, z) = (a, b, c)$.
- Anderzijds zijn er ook oneindig veel drietallen $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ met a, b en c niet alledrie gelijk, zodat er twee verschillende drietallen $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ zijn waarvoor geldt $f(x, y, z) = (a, b, c)$.

(Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade 2010)

8. Laat $n \geq 2$ en $k \geq 1$ gehele getallen zijn. In een land zijn n steden en tussen elk paar steden is een busverbinding in beide richtingen. Laat A en B twee verschillende steden zijn. Dan is het aantal manieren waarop je van A naar B kunt reizen met precies k bussen, gelijk aan

$$\frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n}.$$

(Selectietoets Nederlandse team voor de Internationale Wiskunde Olympiade 2011)

9. Als a en b oneven positieve gehele getallen zijn met de eigenschap dat $ab \mid a^2 + b^2 - 4$, dan geldt

$$\left| \frac{a^2 + b^2 - 4}{ab} \right| = 2.$$

10. Scholieren die het trainingsprogramma voor de Internationale Wiskunde Olympiade doorlopen, kiezen daarna vrijwel altijd voor een studie wiskunde, ook als ze vóór deelname aan dit programma iets anders van plan waren.
11. Hoewel filelezers regelmatig aankondigen dat ze “de files van 7 km of langer of die met een bijzondere oorzaak” zullen noemen, noemen ze dan in feite altijd “de files van 7 km of langer en die met een bijzondere oorzaak”, wat trouwens ook genoemd zou kunnen worden: “de files van 7 km of langer of met een bijzondere oorzaak”.
12. De gebiedende wijs kan in het Nederlands diverse andere betekenissen hebben dan een opdracht, zoals in de zinnen

Leg dat maar eens uit aan je vrouw.

en

Vergeet één keer je fiets op slot te zetten en hij wordt gestolen.