Counting problems for number rings

Brakenhoff, J.F.

Stellingen

behorende bij het proefschrift
Counting problems for number rings
van Jos Brakenhoff

1. De rij
$$f(m) = \max_K \#\{R \subset \mathcal{O}_K : R \text{ is een deelring van index } m\},$$
waarbij m loopt over de verzameling van positieve gehele getallen, K over de collectie van getallenlichamen van graad 5 en $\mathcal{O}_K$ de ring van gehelen van K is, voldoet aan
$$\limsup_{m\to\infty} \frac{\log f(m)}{\log m} \leq \frac{60}{34}.$$

2. Laat K een getallenlichaam zijn en schrijf n voor zijn graad. Laat $A \subset \mathcal{O}_K$ een deelring van index m in de ring van gehelen van K zijn. Zij S_A de verzameling gebroken A-idealen I die voldoen aan $I\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K$. Dan geldt voor de grootte van S_A de grens
$$\#S_A \leq m^{n/2+o_n(1)}.$$

3. De kans dat voor een willekeurig monisch polynoom $f \in \mathbb{Z}[X]$ van graad 2 de ring $\mathbb{Z}[X]/(f)$ de ring van gehelen van een getallenlichaam is, is $6/\pi^2$. Om precies te zijn, definieer voor positieve reële getallen x het domein $D(x) = ([-x,x] \times [-x,x]) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$. Dan is er een constante c zodat voor alle x geldt
$$\frac{\#\{(a,b) \in D(x) : \mathbb{Z}[X]/(X^2+aX+b) \text{ is een ring van gehelen}\}}{\#D(x)} - \frac{6}{\pi^2} \leq \frac{c}{x^{1/4}}.$$

4. Voor alle positieve gehele getallen n is er een constante $c(n)$ zodanig dat voor alle priemgetallen p, alle gehele getallen d met $0 \leq d \leq n$ en alle commutatieve hoofdideaalringen A van karakteristiek p met $\#A = p^n$ de ongelijkheid
$$\#\{R \subset A : R \text{ is een deelring van index } p^d\} \leq c(n)p^{d^3-d}$$
geldt.
Deze uitspraak is voor geen enkele d waar als we de uitdrukking $d^3 - d$ vervangen door $\frac{d^2-2}{8}$.

5. Het is bij darten mogelijk om in een 501-wedstrijd per dart een gemiddelde aantal punten van meer dan 57,4 te halen. Als een darter zo'n gemiddelde heeft gehaald in een wedstrijd die niet voortijdig is afgebroken, dan heeft hij die wedstrijd verloren. Zie [4] voor achtergrondinformatie.

Laat d een positief geheel getal zijn. Een *Gasca-d-ruimte* is een verzameling punten $\mathcal{P}$ tezamen met een verzameling $\mathcal{L}$ van deelverzamelingen van $\mathcal{P}$ die we lijnen noemen, zodanig dat

> door elk tweetal punten ten hoogste één lijn gaat,
>
> elke lijn in $\mathcal{L}$ ten hoogste d punten heeft en
>
> voor elk punt $x \in \mathcal{P}$ er lijnen $l_1, \ldots, l_d$ in $\mathcal{L}$ bestaan waarvoor geldt
>
> $$\bigcup_{i=1}^{d} l_i = \mathcal{P} \setminus \{x\}.$$

Zie [2] en [3] voor achtergrondinformatie.

6. Voor geen enkele d bestaat er een Gasca-d-ruimte met $d^2 - d + 4$ of meer punten. Daarentegen bestaat er wel voor elk geheel getal D en elke positieve reële ϵ een geheel getal d met $d \geq D$ en een Gasca-d-ruimte $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ met $\#\mathcal{P} \geq d^2 - (1+\epsilon)d\sqrt{d}$.

7. Er liggen $2n+1$ even grote munten op een rij, afwisselend met kop en munt boven.

   $$\text{K M K M} \cdots \text{K M K}$$

   Het is dan mogelijk om in een eindig aantal zetten de situatie te bereiken waar alle koppen links liggen en alle munten rechts.

   $$\text{K K} \cdots \text{K M M} \cdots \text{M}$$

   Hierbij bestaat een zet uit het verplaatsen van twee aan elkaar grenzende munten zodat

   > één van de twee verplaatste munten met kop boven ligt en de ander met munt,
   >
   > de twee munten naast elkaar eindigen op dezelfde lijn als de andere munten en aan een munt grenzen die er al ligt, en
   >
   > de twee munten in dezelfde volgorde eindigen als ze waren begonnen.

   De kortste manier om dit te bereiken kost minstens $\frac{1}{2}n(n+1)$ en hoogstens $\frac{1}{2}n(3n-1)$ zetten.

Zij g een positief geheel getal. Een deelverzameling S van $\mathbb{Z}$, de groep van gehele getallen, heet *g-vrij* als voor elk tweetal elementen $a, b \in S$ met $a \neq b$ de ongelijkheid $|a-b| \geq g$ geldt.

Een eindige rij van verzamelingen $(S_i)_{i=1}^n$ staat in *Gray code-ordening* als voor alle i met $1 \leq i \leq n-1$ geldt dat de verzameling S_{i+1} uit S_i kan worden gemaakt door toevoeging of verwijdering van één element.

De rij

$$(\{2\}, \emptyset, \{1\}, \{1,4\}, \{4\}, \{0,4\}, \{0\}, \{0,3\}, \{3\})$$

is bijvoorbeeld een Gray code-ordening van de 3-vrije deelverzamelingen van de verzameling $\{0, \ldots, 4\}$. Zie [1] voor achtergrondinformatie.

8. Als $g = 2h + \epsilon$ een geheel getal is met $h \geq 2$ en $\epsilon \in \{0,1\}$ en N een geheel getal met $2 \leq N \leq 3h^2 - 3h - 1 + \epsilon(2h-2)$ is, dan bestaat er geen Gray code-ordening van de g-vrije deelverzamelingen van $\{0, \ldots, N\}$.

9. Als je als wiskundige op de schouders van je voorganger wilt staan, moet je vaak eerst je voeten aanpassen.

10. Een goede articulatie kan de begrijpelijkheid van zowel wiskundige bewijzen als musicalnummers zeer vergroten.

11. Als je 's nachts om drie uur niet kunt slapen, kun je beter de afwas doen dan stofzuigen.

12. Stellingen bij het proefschrift hebben het voordeel dat je het bewijs niet hoeft op te schrijven.

Referenties

[1] T. Chinburg, C. D. Savage, H. S. Wilf, *Combinatorial families that are exponentially far from being listable in Gray code sequence*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 379–402.

[2] M. Gasca, J. I. Maeztu, *On Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^k$*, Numer. Math. **39** (1982), 1–14.

[3] H. Hakopian, K. Jetter, G. Zimmermann, *A new proof of the Gasca-Maeztu conjecture for $n = 4$*, J. Approx. Theory **159** (2009), 224–242.

[4] `http://nl.wikipedia.org/wiki/Darts_(sport)`