



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Exploration on and of networks

Güldas, H.

Citation

Güldas, H. (2019, July 3). *Exploration on and of networks*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/74479>

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [Leiden University Non-exclusive license](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/74479>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Cover Page



Universiteit Leiden



The following handle holds various files of this Leiden University dissertation:

<http://hdl.handle.net/1887/74479>

Author: Guldás, H.

Title: Exploration on and of networks

Issue Date: 2019-07-03

Samenvatting

Dit proefschrift bestaat uit twee delen, met als gemeenschappelijk thema ‘Exploratie op en van Netwerken’. In Deel I onderzoeken we het thema ‘exploratie op netwerken’ door random wandelingen op dynamische random grafen te bestuderen. In Deel II onderzoeken we het thema ‘exploratie van netwerken’, door het probleem van complexiteit van random schijfgebieden te bestuderen.

Deel I: Random wandelingen op dynamische random grafen

Random grafen zijn wiskundige objecten die worden gebruikt voor het bestuderen van netwerken. Random wandelingen op random grafen kunnen worden gezien als een model voor exploratie op netwerken. Een bepaalde functie van een random wandeling, de mengtijd genoemd, kan worden beschouwd als een maat voor hoe snel het netwerk wordt geëxploreerd door een random wandeling. De mengtijden van random wandelingen op random grafen zijn de afgelopen decennia uitgebreid bestudeerd. Het grootste deel van het onderzoek rond dit onderwerp heeft zich echter geconcentreerd op statische grafen, terwijl de meeste netwerken juist in de tijd veranderen. In Deel I van dit proefschrift bestuderen we mengtijden van random wandelingen op random grafen wanneer de random graaf zelf ook in de tijd verandert. We concentreren ons op een bepaald type dynamica, de zogenaamde herbedradingsdynamiek, waarin de graden worden vastgelegd terwijl de verbindingen willekeurig worden gereorganiseerd.

In hoofdstuk 2 van het proefschrift introduceren we eerst het dynamische configuratiemodel en bestuderen we vervolgens de mengtijd van random wandelingen zonder backtracking. In het dynamische configuratiemodel wordt op elke tijdseenheid een vast deel van de lijnen uniform willekeurig gekozen en vervolgens willekeurig herbedraad. We laten zien, onder bepaalde regelmatigheidscondities op de gradenreeks, dat als de fractie van de opnieuw bedrade lijnen groot genoeg is, de mengtijd veel kleiner is dan de mengtijd op de statische graaf, en dat er geen zogenaamde cutoff is. Onze resultaten gelden met een kans die naar 1 convergeert als het aantal knopen naar oneindig gaat, en wel met betrekking tot een uniforme keuze van de initiële knoop en de initiële configuratie. In onze bewijzen laten we zien dat de mengtijd gerelateerd is aan een regeneratietijd, namelijk, de tijd dat de random wandeling langs een eerder bedrade lijn beweegt, waarbij we de boomachtige structuur van het configuratiemodel gebruiken.

In hoofdstuk 3 van het proefschrift breiden we de resultaten van hoofdstuk 2 uit naar complementaire regimes. In het bijzonder identificeren we drie verschillende regimes die superkritiek, kritiek en subkritiek worden genoemd. Het superkritieke

regime komt overeen met de resultaten van hoofdstuk 2. In het kritieke regime, waar de proportie van de opnieuw bedrade lijnen niet al te groot en niet al te klein is, vinden we dat de mengtijd logaritmisch groeit in het aantal knopen, zoals voor de statische graaf, en er is eenzijdige cutoff, in tegenstelling tot wat we zien voor de mengtijd op de statische graaf. In het subkritieke regime, waar de proportie van de opnieuw bedrade lijnen klein is, zien we dat de mengtijd hetzelfde is als de mengtijd in de statische graaf: die groeit logaritmisch in het aantal knopen, en er is een tweezijdige cutoff. In onze bewijzen gebruiken we opnieuw het argument voor de regeneratietijd, maar dit keer gebruiken we impliciet een koppelingsargument, waarbij de random wandeling op het dynamische configuratiemodel wordt gekoppeld aan een gewijzigde random wandeling op de statische graaf. Het bestaan van deze koppeling hangt af van de boomachtige structuur van het configuratiemodel.

In hoofdstuk 4 van het proefschrift beschouwen we een meer algemene klasse van dynamische random graafmodellen, die het dynamische configuratiemodel als een speciaal geval omvat. Voortbouwend op de ideeën die in hoofdstuk 3 zijn ontwikkeld, laten we zien dat, onder bepaalde regulariteitscondities op de gradenrij en de graafdynamiek, de random wandeling zonder backtracking op de dynamische random graaf kan worden gekoppeld aan een gewijzigde random wandeling op de statische graaf. Met behulp van deze koppeling laten we een verband zien tussen de mengtijd van de random wandeling op de dynamische graaf en de mengtijd van de random wandeling op de statische graaf, en relateren we de mengtijd aan de hierboven beschreven regeneratietijd. Verder geven we een voorbeeld van een model binnen deze klasse van dynamische random graafmodellen, genaamd random wandeling met lokale herbedrading, waarbij het opnieuw bedraden plaatsvindt langs de random wandeling zelf. Met behulp van de bovenstaande link verkrijgen we dezelfde trichotomie als in hoofdstuk 3 voor de random wandeling met lokale herbedrading, maar op een andere tijdschaal.

Deel II: Complexiteit van random schijfgebieden

De complexiteit van random schijfgebieden hangt nauw samen met het probleem van conflictvrije kleuringen van schijfgebieden. Het concept van conflictvrije kleuringen is een generalisatie van het concept van graafkleuringen en ontstaat in de context van frequentie-toekenning in een netwerk van draadloze zenders. Elke draadloze zender wordt verondersteld een dekkinggebied in de vorm van een schijf te hebben en wordt een zodanige frequentie toegekend dat een ontvanger niet wordt beïnvloed door interferentie van signalen van verschillende zenders. In dit kader kan het minimale aantal kleuren dat vereist is voor een conflictvrije kleuring van schijfgebieden worden beschouwd als een structurele parameter van het onderliggende draadloze netwerk. In Deel II van het proefschrift onderzoeken we de typische structuur van de netwerken die ontstaan als een resultaat van een random proces. Om dit te doen, voeren we een ‘mean-case’ analyse uit voor de complexiteit van random schijfgebieden met behulp van ideeën uit de geometrische waarschijnlijkheidstheorie.

In hoofdstuk 5 van het proefschrift bestuderen we de gemiddelde complexiteit van random schijfgebieden in twee verschillende situaties, een waarin de schijfcentra uni-

form random worden gekozen in een vierkant en een waarin de schijfcentra uniform worden gekozen in een schijf. We laten zien dat, onder bepaalde condities op de straal van de schijfgebieden, de gemiddelde complexiteit in beide gevallen van orde $n^{1/3}$ is, waarbij n het aantal schijfgebieden is. Onze bewijzen zijn geïnspireerd door de argumenten die worden gebruikt voor de gemiddelde complexiteit van convexe omhulsels van random punten. Meer specifiek laten we zien dat de gemiddelde complexiteit van de unie gerelateerd is aan het gemiddelde oppervlak van een zogenaamde ‘halo’ van de schijfcentra, wat analoog is aan het complement van het convexe omhulsel van random punten, en berekenen we het gemiddelde oppervlak van de halo via een discretiseringsargument. We laten ook een verband zien tussen de complexiteit van schijfgebieden en de complexiteit van convexe omhulsels van een reeks punten.