



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Diophantine equations in positive characteristic

Koymans, P.H.

Citation

Koymans, P. H. (2019, June 19). *Diophantine equations in positive characteristic*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/74294>

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [Leiden University Non-exclusive license](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/74294>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Cover Page



Universiteit Leiden



The handle <http://hdl.handle.net/1887/74294> holds various files of this Leiden University dissertation.

Author: Koymans, P.H.

Title: Diophantine equations in positive characteristic

Issue Date: 2019-06-19

Stellingen

behorende bij het proefschrift getiteld

Diophantische vergelijkingen in positieve karakteristiek

van Peter Koymans

1. Zij p een priemgetal en zij K een eindig voortgebracht lichaam over $\mathbb{F}_p$. Voor vaste $a, b \in K^*$ bekijken we de vergelijking

$$ax^m + by^n = 1 \tag{1}$$

in $x, y \in K$ en gehele getallen $m, n > 1$ copriem met p en

$$(m, n) \notin \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\}.$$

Dan is er een eindige verzameling $\mathcal{T} \subseteq K \times K$ met de eigenschap dat voor elke oplossing (x, y, m, n) van vergelijking (1), er $(\gamma, \delta) \in \mathcal{T}$ en $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ bestaan met

$$ax^m = \gamma^{p^t} \text{ en } by^n = \delta^{p^t}.$$

2. *Samen met Carlo Pagano.* Zij p een priemgetal en zij K een lichaam van karakteristiek p . Zij G een ondergroep van $K^* \times K^*$ van rang r . Laat $a, b \in K^*$ zijn en veronderstel dat er geen positief geheel getal n bestaat met de eigenschappen $\text{ggd}(n, p) = 1$ en $(a, b)^n \in G$. Dan heeft de vergelijking

$$ax + by = 1 \text{ in } (x, y) \in G$$

ten hoogste $31 \cdot 19^{r+1}$ oplossingen.

3. *Samen met Carlo Pagano.* Zij p een priemgetal en zij K een lichaam van karakteristiek p . Zij G een eindig voortgebrachte ondergroep van $K^* \times K^*$ van rang r . Dan heeft de vergelijking

$$x + y = 1 \text{ in } (x, y) \in G$$

ten hoogste $31 \cdot 19^r$ oplossingen (x, y) met $(x, y) \notin G^p$.

4. *Samen met Carlo Pagano.* Zij $p > 480$ een priemgetal. Zij $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ zodanig dat $\text{ggd}(N, p) = 1$, en neem bovendien aan dat de vergelijking

$$ap^s + b \equiv 0 \pmod{N}$$

geen oplossingen heeft in gehele getallen $s \geq 0$ and $0 < a, b < 480$. Dan heeft het Fermat-opervlak

$$x^N + y^N + z^N = 1$$

geen oplossingen $x, y, z \in \mathbb{F}_p(t)$ met $x, y, z, x/y, x/z, y/z \notin \mathbb{F}_p(t^p)$.

5. *Samen met Djordjo Milovic.* Er geldt

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{|\{p \text{ priem} : p \leq X, p \equiv 1 \pmod{4} \text{ en } 16 \mid \#\text{Cl}(\mathbb{Q}(\sqrt{-2p}))\}|}{|\{p \text{ priem} : p \leq X\}|} = \frac{1}{16}.$$

6. Er geldt

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{|\{p \text{ priem} : p \leq X \text{ en } 16 \mid \#\text{Cl}(\mathbb{Q}(\sqrt{-p}))\}|}{|\{p \text{ priem} : p \leq X\}|} = \frac{1}{16}.$$

7. *Samen met Djordjo Milovic.* Neem een standaardvermoeden over korte karakter-sommen aan. Dan is er geen wijzerlichaam voor de 16-rang van $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$.

8. *Samen met Christopher Frei en Efthymios Sofos.* Veronderstel de veralgemeende Riemann-hypothese. Dan is er een absolute constante C zodanig dat voor alle oneven getallen $n > C$ de volgende equivalentie geldt: $n \equiv 3 \pmod{12}$ dan en slechts dan als er oneven priemmen p_1, p_2, p_3 met 27 als primitieve wortel zijn met $n = p_1 + p_2 + p_3$.

9. *Samen met Carlo Pagano.* Veronderstel de veralgemeende Riemann-hypothese. Dan geldt voor alle oneven priemmen l en alle eindig voortgebrachte torsiemodulen A over $\mathbb{Z}_l[\zeta_l]$ dat de limiet

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{|\{K \text{ cyclisch van graad } l : D_K < X \text{ en } ((1 - \zeta_l)\text{Cl}(K))[(1 - \zeta_l)^\infty] \cong A\}|}{|\{K \text{ cyclisch van graad } l : D_K < X\}|}$$

bestaat en gelijk is aan

$$\frac{\prod_{i=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{l^i})}{|A| |\text{Aut}_{\mathbb{Z}_l[\zeta_l]}(A)|}.$$

10. *Samen met Stephanie Chan, Djordjo Milovic en Carlo Pagano.* We schrijven $\mathcal{D}$ voor de verzameling van positieve, fundamentele kwadratische discriminanten die geen priemdelers 3 modulo 4 hebben. Dan is de negatieve Pellvergelijking oplosbaar voor ten minste 53.8% van de elementen in $\mathcal{D}$.

11. Er geldt voor alle eindige abelse 2-groepen A dat de limiet

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{|\{K \text{ reëel kwadratisch} : D_K < X \text{ en } (2\text{Cl}(K))[2^\infty] \cong A\}|}{|\{K \text{ reëel kwadratisch} : D_K < X\}|}$$

bestaat en gelijk is aan

$$\frac{\prod_{i=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^i}\right)}{|A| |\text{Aut}(A)|}.$$

12. Zij $q = p^l$ een priemmacht en zij $K := \mathbb{F}_q(t)$. We definiëren voor een geheel getal $i \geq 0$

$$[i] := t^{q^i} - t.$$

We definiëren de Carlitz-faculteit inductief door $D_0 := 1$, en voor een geheel getal $i > 0$ door

$$D_i := \prod_{1 \leq j \leq i} [j]^{q^{i-j}}.$$

Dan geldt voor alle oplossingen $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $f(t) \in \mathbb{F}_q(t)$ en $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ van

$$f(t)^k - 1 = D_i$$

dat i gelijk is aan 0.

13. Wiskunde is de meest precieze doch meest creatieve vorm van kunst.