



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Diophantine equations in positive characteristic

Koymans, P.H.

Citation

Koymans, P. H. (2019, June 19). *Diophantine equations in positive characteristic*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/74294>

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [Leiden University Non-exclusive license](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/74294>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Cover Page



Universiteit Leiden



The handle <http://hdl.handle.net/1887/74294> holds various files of this Leiden University dissertation.

Author: Koymans, P.H.

Title: Diophantine equations in positive characteristic

Issue Date: 2019-06-19

Samenvatting

Dit proefschrift “Diophantische vergelijkingen in positieve karakteristiek” bestaat uit drie losse delen, die elk afzonderlijk kunnen worden gelezen. In het eerste deel bestuderen we zogenaamde exponentiële Diophantische vergelijkingen in positieve karakteristiek. Een voorbeeld van een exponentiële Diophantische vergelijking is

$$2^a \cdot 3^b \cdot 5^c - 2^d \cdot 3^e \cdot 5^f = 1,$$

waar we op zoek zijn naar oplossingen met a, b, c, d, e, f gehele getallen. Het is een bekende stelling dat een dergelijke vergelijking slechts eindig veel oplossingen heeft. Er is ook uitgebreid onderzoek gedaan naar een bovengrens voor het aantal oplossingen.

In de bovenstaande vergelijking zijn 2, 3 en 5 allemaal gehele getallen. Als we de gehele getallen vervangen door vaste elementen uit een lichaam van positieve karakteristiek, kunnen we ons nog steeds afvragen of het mogelijk is om een bovengrens te berekenen. In dit geval is het echter niet langer waar dat er maar slechts eindig veel oplossingen zijn. Wel kunnen de oplossingen op een natuurlijke manier in equivalentieklassen worden verdeeld. Een van de belangrijkste resultaten in dit proefschrift, bewezen samen met Carlo Pagano, is een bovengrens voor het aantal equivalentieklassen.

Twee andere bekende exponentiële Diophantische vergelijkingen zijn de zogenaamde Fermat-vergelijking en de Catalan-vergelijking. De Catalan-vergelijking is

$$x^n - y^m = 1,$$

waar we zoeken naar gehele oplossingen $x, y, m, n > 1$. In 1844 sprak Eugène Catalan al het vermoeden uit dat de enige oplossing $x = 3, n = 2, y = 2$ en $m = 3$ is. Pas zeer recent (2002) heeft Preda Mihailescu bewezen dat dit inderdaad klopt! In dit proefschrift bestuderen we het analogon van deze vergelijking over lichamen van positieve karakteristiek. Opnieuw blijken er oneindig veel oplossingen te zijn; we bewijzen dat er slechts eindig veel oplossingen zijn op een natuurlijke equivalentierelatie na.

We sluiten het eerste deel af met een uitgebreide studie van het Fermat-opppervlak gegeven door de vergelijking

$$x^N + y^N + z^N = 1.$$

We zijn deze keer geïnteresseerd voor welke waarden van N er oplossingen x, y en z in het lichaam $\mathbb{F}_p(t)$ bestaan. Als we dezelfde vraag zouden stellen over een lichaam van

karacteristiek 0, bijvoorbeeld de rationale getallen, dan is het nog steeds een compleet open probleem om de oplossingsverzameling van het Fermat-oppervlak te vinden. Samen met Carlo Pagano heb ik bewezen dat er oneindig veel priemgetallen N zijn waarvoor de vergelijking geen oplossingen heeft onder een extra technische voorwaarde. We laten ook zien dat de stelling niet langer waar is zonder deze technische voorwaarde.

Het tweede deel van dit proefschrift betreft statistische eigenschappen van klassegroepen. Al eeuwenlang zijn wiskundigen gefascineerd door klassegroepen en hun relatie met unieke factorisatie. Cohen en Lenstra hebben in 1984 een groot aantal vermoedens uitgesproken over de statistische eigenschappen van klassegroepen. Sindsdien is er uitgebreid onderzoek hiernaar gedaan en dit proefschrift gaat hier verder op in. We kunnen de belangrijkste stellingen uit dit proefschrift als volgt informeel samenvatten.

Stelling. Laat p een priemgetal zijn en $h(-p)$ het klassegetal van $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$. Dan is de dichtheid van de priemen met de eigenschap $16 \mid h(-p)$ gelijk aan $\frac{1}{16}$.

Stelling (samen met Djordjo Milovic). Laat p een priemgetal zijn en $h(-2p)$ het klassegetal van $\mathbb{Q}(\sqrt{-2p})$. Dan is de dichtheid van de priemen met de eigenschap $p \equiv 1 \pmod{4}$ en $16 \mid h(-2p)$ gelijk aan $\frac{1}{16}$.

In het derde deel bekijken we een van de meest klassieke problemen in de analytische getaltheorie, namelijk het vermoeden van Goldbach. Christian Goldbach sprak in 1742 het vermoeden uit dat elk oneven getal n groter dan 5 kan worden geschreven als de som van drie priemgetallen. Ivan Vinogradov bewees in de jaren 30 van de vorige eeuw dat dit waar is voor voldoende grote n , en Harald Helfgott heeft het in 2013 voor alle n groter dan 5 bewezen.

Laat $g > 1$ een geheel getal zijn dat geen kwadraat is. We bekijken de vergelijking

$$p_1 + p_2 + p_3 = n,$$

waar de priemen p_1 , p_2 en p_3 allemaal g als primitieve wortel hebben, d.w.z. g brengt de groep $(\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z})^*$ voort voor $i = 1, 2, 3$. We laten zien dat de bovenstaande vergelijking voor voldoende grote n altijd een oplossing heeft onder aanname van de veralgemeende Riemann-hypothese, zolang n voldoet aan zekere congruentie condities. Dit artikel is samen met Christopher Frei en Efthymios Sofos geschreven.