



Universiteit  
Leiden  
The Netherlands

## **Mechanical metamaterials: nonlinear beams and excess zero modes**

Lubbers, L.A.

### **Citation**

Lubbers, L. A. (2018, September 13). *Mechanical metamaterials: nonlinear beams and excess zero modes*. *Casimir PhD Series*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/65383>

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/65383>

**Note:** To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Cover Page



Universiteit Leiden



The handle <http://hdl.handle.net/1887/65383> holds various files of this Leiden University dissertation.

**Author:** Lubbers, L.A.

**Title:** Mechanical metamaterials: nonlinear beams and excess zero modes

**Issue Date:** 2018-09-13

# Samenvatting

Mechanische metamaterialen zijn kunstmatige materialen die hun bijzondere eigenschappen danken aan hun structuur en niet zozeer aan de eigenschappen van het materiaal waaruit deze gefabriceerd zijn. Deze structuur, of architectuur, bestaat vaak uit periodiek geordende bouwstenen, waarvan het collectief gedrag leidt tot bijzondere (macroscopische) eigenschappen. In dit proefschrift beschouwen we twee aspecten van mechanische metamaterialen: (i) flexibele staafverbindingen en (ii) microstructuren bestaande uit scharnierende vierkantjes. Beide aspecten spelen een belangrijke rol in een breed scala aan metamaterialen [4, 20, 25–29, 36–38, 40, 44]. Echter roept de toepassing van beide aspecten ook nieuwe, onbeantwoorde vragen op, zoals we motiveren in het introductiehoofdstuk van dit proefschrift. Ten eerste, alhoewel het mechanische gedrag van dunne staven goed begrepen is, introduceren staven met een eindige dikte, zoals die veelal voorkomen in mechanische metamaterialen, nieuwe fysica die nog niet goed begrepen wordt; brede staven vertonen een negatieve stijfheid, gekarakteriseerd door een afnemende kracht voor toenemende compressie, na het optreden van de knikinstabiliteit. Ten tweede, volledig gevulde microstructuren van scharnierende vierkantjes bezitten precies één (globale) vrije beweging die wordt gekenmerkt door het collectief, tegenovergesteld roteren van vierkantjes [1, 20], maar potentiële vrije bewegingen die voortkomen uit (uitgedunde) microstructuren met missende vierkantjes zijn volledig onverkend gebleven. Hoe groeit het aantal vrije bewegingen in systemen met missende vierkantjes, kunnen we deze tellen, en wat is de ruimtelijke structuur van deze nieuwe vrije bewegingen? In dit proefschrift beantwoorden we de bovengenoemde open vragen. Hiermee verschaffen we de nodige inzichten om de eigenschappen van dikke staven en uitgedunde verzamelingen van scharnierende vierkantjes volledig te begrijpen, alvorens deze met volle potentie kunnen worden ingezet voor het ontwerp van nieuwe mechanische functionaliteiten.

In **hoofdstuk 2** focussen we op staven en ontwikkelen we een niet-lineair 1D model om de negatieve stijfheid na de knikinstabiliteit, ook wel subkritisch knikken genoemd, van dikke 'neo-Hookean' [52] staven te beschrijven. Om dit model te ontwikkelen laten we eerst zien dat subkritisch knikgedrag een robuust verschijnsel is dat niet wordt veroorzaakt door 3D effecten of singulariteiten als gevolg van randeffecten. We doen

dit door experimenten en volledig realistische 3D simulaties te vergelijken met 2D simulaties met sterk versimpelde randcondities. Voor alle drie de gevallen vinden we dat de stijfheid na de knikinstabiliteit systematisch varieert met de breedte-lengte verhouding,  $t$ , en dat deze negatief wordt voor  $t \gtrsim 0.12$ . Om het fysische mechanisme dat verantwoordelijk is voor het subkritische knikgedrag te achterhalen, richten we ons op de meest simpele, 2D situatie. We laten in het bijzonder zien dat het cruciale, missende ingrediënt om het subkritische knikgedrag correct te beschrijven de niet-lineariteit in de axiale spanning-rek relatie is, als gevolg van de grote deformaties die verbonden zijn met het knikken van dikke staven. Vervolgens gebruiken we dit inzicht om een niet-lineaire 1D energiedichtheids-functionaal op te stellen door de Mindlin-Reissner beschrijving voor staven [41] te combineren met een niet-lineariteit in de axiale spanning-rek relatie; minimalisatie van de totale elastische energie van de staaf op basis van deze energiedichtheid resulteert in een gesloten set van staafvergelijkingen. We hebben deze vergelijkingen analytisch opgelost voor de stijfheid na de knikinstabiliteit, en we vinden een uitstekende overeenkomst tussen theorie, experimenten en simulaties, zonder het gebruik van vrije parameters. Het werk in dit hoofdstuk leidt hiermee tot een beter begrip van het mechanisch gedrag van structuren waarin dikke staven functionaliteit leveren, en het biedt tevens handvaten om mechanisch gedrag na het optreden van (knik)instabiliteiten goed doordacht te ontwerpen.

In **hoofdstuk 3** bestuderen we buitengewone vrije bewegingen die verschijnen in willekeurig uitgedunde verzamelingen van rigide vierhoekjes, die verbonden zijn aan hun hoekpunten. Het simpelste voorbeeld van een buitengewone vrije beweging treedt op in volledig gevulde systemen, waarin (nog) geen vierhoekjes zijn verwijderd. Grote systemen bestaande uit generieke vierhoekjes zijn rigide, maar grote symmetrische systemen die bestaan uit identieke *vierkantjes* bezitten precies één vrije beweging [1, 20], onafhankelijk van de systeemgrootte. In dit hoofdstuk richten we ons op het aantal buitengewone vrije bewegingen in uitgedunde systemen, gedefinieerd als het verschil tussen het aantal vrije bewegingen in symmetrische en generieke systemen, met een identiek patroon van verwijderde vierhoekjes. Door een groot aantal onafhankelijke simulaties uit te voeren, laten we zien dat het gemiddelde aantal buitengewone vrije bewegingen als functie van het aantal verwijderde

vierhoekjes een maximum heeft dat groter is dan één; dit toont aan dat er uitgedunde systemen van vierhoekjes bestaan met meer dan één buitengewone vrije beweging. Vervolgens quantificeren we dit (gemiddelde) maximum als functie van de systeemgrootte en de fractie van het aantal verwijderde vierhoekjes, en demonstreren we dat het aantal buitengewone vrije bewegingen een intrinsieke grootheid is die beschreven wordt door schalingsrelaties met simpele, gemiddelde exponenten. Daarnaast ontwerpen we een periodieke bouwsteen bestaande uit  $6 \times 6$  vierhoekjes, waaruit we grotere systemen opbouwen met een dichtheid aan buitengewone vrije bewegingen die zes keer hoger is dan de piekwaarde van willekeurig uitgedunde systemen, onafhankelijk van de systeemgrootte. Als laatste bestuderen we het optreden van buitengewone vrije bewegingen voor het verwijderen van de verbindingen tussen de hoekpunten van vierhoekjes, en hiervoor vinden we sterke overeenkomsten met het beschreven schalingsgedrag voor verwijderde vierkantjes. In conclusie, dit hoofdstuk toont aan dat er een arbitrair aantal buitengewone vrije bewegingen bestaat in willekeurig uitgedunde verzamelingen van scharnierende vierkantjes.

In **hoofdstuk 4**, het laatste hoofdstuk van dit proefschrift, ontwikkelen we een telmethode om het aantal (buitengewone) vrije bewegingen voor systemen van scharnierende vierkantjes te benaderen. Beginnend met de observatie dat het verschijnen van buitengewone vrije bewegingen wordt veroorzaakt door verbonden gebiedjes van vierhoekjes (die één vrije beweging hebben in het symmetrische geval, maar geen vrije beweging in het generieke geval), ontwikkelen we een procedure om een gegeven systeem onder te verdelen in clusters, connectoren en overblijvende vierhoekjes. We laten zien dat de overblijvende vierhoekjes vrijwel altijd gelijkwaardig bijdragen aan het aantal vrije bewegingen in het generieke en symmetrische geval, zodat deze irrelevant zijn voor het aantal buitengewone vrije bewegingen. We vestigen onze aandacht daarom op de versimpelde, gereduceerde systemen, die uitsluitend bestaan uit clusters en connectoren. Om het aantal (buitengewone) vrije bewegingen in de gereduceerde systemen te benaderen, beschouwen we de clusters als 'zwarte dozen' met vier vrijheidsgraden (translatie, rotatie en scharnieren), en laten we zien hoe de bewegingen tussen clusters worden beperkt door de aanwezigheid voor ieder van de drie verschillende typen connectoren die optreden. Een subtiele eigenschap van sterk verbonden clusters

is dat deze zogenaamde zelf-spanningen bezitten als gevolg van overtollige connectoren. Om het aantal vrije bewegingen correct te benaderen, elimineren we de meeste van deze zelf-spanningen door het iteratief samenvoegen van sterk verbonden clusters. Deze procedure resulteert in een discreet algoritme dat het aantal vrije bewegingen stapsgewijs benadert. Uiteindelijk vergelijken we de voorspellingen die volgen uit ons algoritme met exacte berekeningen gebaseerd op de Hessiaan, waarmee we demonstreren dat ons algoritme een nauwkeurige ondergrens oplevert voor het aantal (buitengewone) vrije bewegingen in de gereduceerde systemen. We zijn daarmee dus in staat om het aantal (buitengewone) vrije bewegingen in uitgedunde systemen van scharnierende vierkantjes te voorspellen.