



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Arakelov inequalities and semistable families of curves uniformized by the unit ball

Damjanovic, N.

Citation

Damjanovic, N. (2018, June 14). *Arakelov inequalities and semistable families of curves uniformized by the unit ball*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/63084>

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/63084>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Cover Page



Universiteit Leiden



The following handle holds various files of this Leiden University dissertation:

<http://hdl.handle.net/1887/63084>

Author: Damjanovic, N.

Title: Arakelov inequalities and semistable families of curves uniformized by the unit ball

Issue Date: 2018-06-14

Bibliography

- [1] Arakelov, S. Ju. Families of algebraic curves with fixed degeneracies. (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 35 (1971), 1269–1293.
- [2] Abramovich, D. ; Karu, K. Weak semistable reduction in characteristic 0. *Invent. Math.* 139 (2000), no. 2, 241–273.
- [3] Bertin, José; Demailly, Jean-Pierre; Illusie, Luc; Peters, Chris Introduction to Hodge theory. SMF/AMS Texts and Monographs, 8. American Mathematical Society, Providence, RI; Société Mathématique de France, Paris, 2002. x+232 pp. ISBN: 0-8218-2040-0
- [4] Beauville, Arnaud Surfaces algébriques complexes. *Astérisque*, No. 54. Société Mathématique de France, Paris, 1978. 14J10
- [5] Beauville, Arnaud Le nombre minimum de fibres singulières d’une courbe stable sur $\mathbb{P}^1$. *Asterisque* 86(1981) 97-108
- [6] Beauville, Arnaud Les familles stables de courbes elliptiques sur $\mathbb{P}^1$ admettant quatre fibres singulières. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 294 (1982), no. 19, 657–660.
- [7] Ben-Zvi, David Moduli spaces. Princeton Companion to Mathematics
- [8] Barth, W.; Peters, C.; Van de Ven, A. Compact complex surfaces. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* 4. Springer-Verlag
- [9] Cao, Huai Dong; Mok, Ngaiming Holomorphic immersions between compact hyperbolic space forms. *Invent. Math.* 100 (1990), no. 1, 32H02.
- [10] Carlson, James; Müller-Stach, Stefan ; Peters, Chris Period mappings and period domains. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 85. Cambridge University Press, Cambridge, 2003. xvi+430 pp. ISBN: 0-521-81466-9
- [11] Cartwright, Donald I.; Koziarz, Vincent; Yeung, Sai-Kee On the Cartwright-Steger surface. *J. Algebraic Geom.* 26, 655-689 (2017)

- [12] Conrad, Brian Grothendieck duality and base change. Lecture Notes in Mathematics, 1750. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [13] Casalaina-Martin, Sebastian, A tour of stable reduction with applications. A celebration of algebraic geometry, 65–117, Clay Math. Proc., 18, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.
- [14] Deligne, Pierre Equations différentielles à points singuliers réguliers. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 163. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.
- [15] Deligne, P. Un théorème de finitude pour la monodromie. Discrete groups in geometry and analysis (New Haven, Conn., 1984), 1–19, Progr. Math., 67, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987.
- [16] Deligne, P. Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 35 1968 259–278.14.52
- [17] Demailly, Jean-Pierre Complex analytic and differential geometry. (personal web page)
- [18] Deza, Michel Marie; Deza, Elena Encyclopedia of distances. Fourth edition. Springer, Berlin, 2016. xxii+756 pp. ISBN: 978-3-662-52843-3
- [19] Esnault, Hélène Fibre de Milnor d’un cône sur une courbe plane singulière. Invent. Math. 68 (1982), no. 3, 477–496.
- [20] Esnault, Hélène; Viehweg, Eckart Lectures on vanishing theorems. DMV Seminar, 20. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992. vi+164 pp. ISBN: 3-7643-2822-3
- [21] Esnault, Hélène; Viehweg, Eckart Revêtements cycliques. Algebraic three-folds (Varenna, 1981), pp. 241–250, Lecture Notes in Math., 947, Springer, Berlin-New York, 1982.
- [22] Earle, C. J.; Kra, I.; Krushkal’, S. L. Holomorphic motions and Teichmüller spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 343 (1994), no. 2, 927–948. 32G15
- [23] Elzein, Fouad; Snoussi, Jawad Local systems and constructible sheaves. Arrangements, local systems and singularities, 111–153, Progr. Math., 283, Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.
- [24] Elzein, Fouad; Le Dung, Trang Mixed Hodge structures. HAL archives ouvert, 2016.
- [25] Faltings, G. Arakelov’s theorem for abelian varieties. Invent. Math. 73 (1983), no. 3, 337–347.

- [26] Godbillon, Claude Feuilletages. Études géométriques. Progress in Mathematics, 98. Birkhäuser Verlag, Basel, 1991. xiv+474 pp. ISBN: 3-7643-2638-7
- [27] Goldman, William M. Complex hyperbolic geometry. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1999. xx+316 pp. ISBN:0-19-853793-X
- [28] Greuel, Gert-Martin; Laplagne, Santiago; Seelisch, Frank Normalization of rings. J. Symbolic Comput. 45 (2010), no. 9, 887–901.
- [29] Griffiths, Phillip A. Periods of integrals on algebraic manifolds. III. Some global differential-geometric properties of the period mapping. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 38 1970 125–180.14.55
- [30] Griffiths, Phillip A. Periods of integrals on algebraic manifolds: Summary of main results and discussion of open problems. Bull. Amer. Math. Soc. 76 1970 228–296.
- [31] Hamenstadt, Ursula, Teichmüller theory, IAS/Park City Mathematics Series Volume 20, 2011
- [32] Hartshorne, Robin Algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. xvi+496 pp. ISBN: 0-387-90244-9
- [33] Hironaka, Heisuke On resolution of singularities (characteristic zero). 1963 Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962) pp. 507–521 Inst. Mittag-Leffler, Djursholm 14.18
- [34] Hollborn, Henning; Müller-Stach, Stefan Hodge numbers for the cohomology of Calabi-Yau type local systems. Algebraic and complex geometry, 225–240, Springer Proc. Math. Stat., 71, Springer, Cham, 2014.
- [35] Huybrechts, Daniel Complex geometry. An introduction. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005. xii+309 pp. ISBN: 3-540-21290-6
- [36] Imayoshi, Yoichi; Taniguchi, Masahiko An introduction to Teichmüller space Springer-Verlag, Tokyo, 1992, ISBN4-431-70088-9
- [37] Inoue, Masahisa Some new surfaces of general type. Tokyo J. Math. 17 (1994), no. 2, 295–319.
- [38] de Jong, A. J. Smoothness, semi-stability and alterations. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 83 (1996), 51–93.

- [39] Jost, Jürgen; Zuo, Kang Arakelov type inequalities for Hodge bundles over algebraic varieties. I. Hodge bundles over algebraic curves. *J. Algebraic Geom.* 11 (2002), no. 3, 535–546. 14D07
- [40] Katz, Nicholas M. Algebraic solutions of differential equations (p-curvature and the Hodge filtration). *Invent. Math.* 18 (1972), 1–118.
- [41] Kawamata, Yujiro Characterization of abelian varieties. *Compositio Math.* 43 (1981), no. 2, 253–276.
- [42] Kirschner, Tim Period mappings with applications to symplectic complex spaces. *Lecture Notes in Mathematics*, 2140. Springer, Cham, 2015. xviii+275 pp. ISBN: 978-3-319-17520-1
- [43] Kempf, G.; Knudsen, Finn Faye; Mumford, D.; Saint-Donat, B. Toroidal embeddings. I. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 339. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.
- [44] Kodaira, K. On the structure of compact complex analytic surfaces. III. *Amer. J. Math.* 90 1968 55–83.57.60
- [45] Koziarz, Vincent; Maubon, Julien Harmonic maps and representations of non-uniform lattices of $\mathrm{PU}(m,1)$. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 58 (2008), no. 2, 507–558.22E40 (53C24 58E20)
- [46] Kulikov, Valentine S. Mixed Hodge structures and singularities. *Cambridge Tracts in Mathematics*, 132. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. xxii+186 pp. ISBN: 0-521-62060-0
- [47] Landman, Alan On the Picard-Lefschetz transformation for algebraic manifolds acquiring general singularities. *Trans. Amer. Math. Soc.* 181 (1973), 89–126. 14D05
- [48] Lee, John M. Introduction to topological manifolds. Second edition. *Graduate Texts in Mathematics*, 202. Springer, New York, 2011. xviii+433 pp. ISBN: 978-1-4419-7939-1
- [49] Livné, R. On certain covers of the universal elliptic curve, Ph.D. Thesis, Harvard University 1981
- [50] Lønsted, Knud The singular points on the moduli spaces for smooth curves. *Math. Ann.* 266 (1984), no. 3, 397–402.
- [51] Murfet, Daniel Derived Functors. (personal web page The Rising Sea)
- [52] Möller, Martin Variations of Hodge structures of a Teichmüller curve. *J. Amer. Math. Soc.* 19 (2006), no. 2, 327–344.

- [53] Mok, Ngaiming On holomorphic immersions into Kähler manifolds of Constant Holomorphic Sectional Curvature. *Sci China Ser A*, 2005, 123–145 MR2156495
- [54] Mok, Ngaiming Metric rigidity theorems on Hermitian locally symmetric manifolds. *Series in Pure Mathematics*, 6. World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1989. xiv+278 pp. ISBN: 9971-50-800-1; 9971-50-802-8
- [55] Möller, Martin; Viehweg, Eckart; Zuo, Kang Special families of curves, of abelian varieties, and of certain minimal manifolds over curves. *Global aspects of complex geometry*, 417–450, Springer, Berlin, 2006.
- [56] Neeman, Amnon Algebraic and analytic geometry. *London Mathematical Society Lecture Note Series*, 345. Cambridge University Press, Cambridge, 2007. xii+420 pp. ISBN: 978-0-521-70983-5
- [57] Peters, C. A. M. A criterion for flatness of Hodge bundles over curves and geometric applications. *Math. Ann.* 268 (1984), no. 1, 1–19.
- [58] Peters, Chris. Arakelov-type inequalities for Hodge bundles. *Algebraic Geometry*, 14D07, 32G20. eprint arXiv:math/0007102
- [59] Rohde, Jan Christian Cyclic coverings, Calabi-Yau manifolds and complex multiplication. *Lecture Notes in Mathematics*, 1975. Springer-Verlag, Berlin, 2009. x+228 pp. ISBN: 978-3-642-00638-8
- [60] Romagny, Matthieu Models of curves. *Arithmetic and geometry around Galois theory*, 149–170, *Progr. Math.*, 304, Birkhäuser/Springer, Basel, 2013.
- [61] Royden, H. L. Automorphisms and isometries of Teichmüller space. *Proceedings of the Romanian-Finnish Seminar on Teichmüller Spaces and Quasiconformal Mappings* (Braşov, 1969), pp. 273–286. Publ. House of the Acad. of the Socialist Republic of Romania, Bucharest, 1971.
- [62] Schütt, Matthias; Shioda, Tetsuji Elliptic surfaces. *Algebraic geometry in East Asia—Seoul 2008*, 51–160, *Adv. Stud. Pure Math.*, 60, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010.
- [63] Shabat; Introduction to complex analysis. Part II. Functions of several variables Second edition, revised and augmented. Izdat. "Nauka", Moscow, 1976. 400 pp. 32-01 (30-01)
- [64] Shimura, Goro Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions. *Bull. Amer. Math. Soc.* 79 (1973)

- [65] Shioda, Tetsuji On elliptic modular surfaces. *J. Math. Soc. Japan* 24 (1972), 20–59.
- [66] Simpson, Carlos T. Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization. *J. Amer. Math. Soc.* 1 (1988), no. 4, 867–918.
- [67] Simpson, Carlos T. Harmonic bundles on noncompact curves. *J. Amer. Math. Soc.* 3 (1990), no. 3, 713–770.
- [68] Simpson; Carlos T. Higgs bundles and Local systems. *Publications mathématiques de l’I.H.É.S.* tome 75 (1992), p. 5-95.
- [69] Szamuely, Tamás; Galois groups and fundamental groups. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 117. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. x+270 pp. ISBN: 978-0-521-88850-9
- [70] Szpiro, Lucien Sur les propriétés numériques du dualisant relatif d’une surface arithmétique. *The Grothendieck Festschrift*, Vol. III, 229–246, *Progr. Math.*, 88, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [71] Tan, Sheng Li The minimal number of singular fibers of a semistable curve over $\mathbb{P}^1$. *J. Algebraic Geom.* 4 (1995), no. 3, 591–596.
- [72] Toledo, Domingo Representations of surface groups in complex hyperbolic space. *J. Differential Geom.* 29 (1989), no. 1, 125–133.57N05
- [73] Urakawa, Hajime Calculus of variations and harmonic maps. *Translations of Mathematical Monographs*, 132. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.
- [74] Viehweg, Eckart Quasi-projective moduli for polarized manifolds. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*, 30. Springer-Verlag, Berlin, 1995. viii+320 pp. ISBN: 3-540-59255-5
- [75] Viehweg, Eckart Vanishing theorems. *J Reine Angew. Math* 335,1-8 (1982)
- [76] Viehweg, Eckart Rational singularities of higher dimensional schemas. *Proc.AMS* 63 (1977)
- [77] Viehweg, Eckart; Zuo, Kang On the isotriviality of families of projective manifolds over curves. *J. Algebraic Geom.* 10 (2001), no. 4, 781–799.
- [78] Viehweg, Eckart; Zuo, Kang On the Brody hyperbolicity of moduli spaces for canonically polarized manifolds. *Duke Math. J.* 118 (2003), no. 1, 103–150.

- [79] Viehweg, Eckart; Zuo, Kang Base spaces of non-isotrivial families of smooth minimal models. *Complex geometry* (Göttingen, 2000), 279–328, Springer, Berlin, 2002.
- [80] Viehweg, Eckart; Zuo, Kang A characterization of certain Shimura curves in the moduli stack of abelian varieties. *J. Differential Geom.* 66 (2004), no. 2, 233–287.
- [81] Voisin, Claire Hodge theory and complex algebraic geometry. I. Reprint of the 2002 English edition. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 76. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [82] Voisin, Claire Hodge theory and complex algebraic geometry. II. Translated from the French by Leila Schneps. Reprint of the 2003 English edition. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 77. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [83] Yau, Shing-Tung; Zhang, Yi. Hodge Bundles on Smooth Compactifications of Siegel Varieties and Applications. eprint arXiv:1201.3784 2012arXiv1201.3784Y
- [84] Yau, S.T., On Calabi’s conjecture and some new results in Algebraic Geometry, *Nat. Acad. Sci USA*, 74, pp. 1798-1799 (1977).

Samenvatting

Dit proefschrift is onderverdeeld in vier hoofdstukken. De eerste twee hoofdstukken zijn van een inleidende aard, met een aantal bekende resultaten met licht aangepaste bewijzen. Het derde hoofdstuk biedt een nieuw gezichtspunt op het bewijs van ongelijkheid (8) uit de Inleiding en maakt een aantal opmerkingen over het geval van gelijkheid in (8). Het laatste hoofdstuk bevat originele resultaten, en geeft een aantal voorbeelden van families waarin gelijkheid in (8) wordt behaald.

Het eerste hoofdstuk behandelt elementaire definities en resultaten aangaande cyclische overdekkingen van n -differentieerbare variëteiten, logaritmische differentiaalvormen, en de cohomologie van cyclische overdekkingen. Hierbij volgen we het boek [20] van Hélène Esnault en Eckart Viehweg op de voet. Sommige resultaten worden in hun oorspronkelijke vorm besproken, andere worden opnieuw bewezen en aangepast aan de context van dit proefschrift.

In het tweede hoofdstuk brengen we de definities en constructies in herinnering van Higgs-bundels en logaritmische Higgs-bundels afkomend van variaties van Hodge-structuren op compacte en niet-compacte krommen, alsmede een aantal belangrijke resultaten van Deligne en Simpson. In de laatste sectie van dit hoofdstuk geven we een kort résumé van elementaire feiten aangaande de Teichmüller-ruimte en Teichmüller-krommen. Ook bespreken we een resultaat van Möller over de samenhang tussen gepolariseerde variaties van rang 2 en gewicht 1, en Teichmüller-krommen.

Het derde hoofdstuk is het belangrijkste hoofdstuk, in de technische zin. Hier bespreken we het bewijs dat Viehweg en Zuo hebben gegeven van de Arakelov-ongelijkheid (8). Hun oorspronkelijke resultaat geldt voor semistabiele families van n -variëteiten, maar in dit proefschrift passen we het bewijs aan, en vullen we alle details in, voor het geval van families van semistabiele krommen. In de laatste sectie van dit hoofdstuk bespreken we het geval dat gelijkheid optreedt in (8). We noemen dit het “maximale geval”. We hadden aanvankelijk gehoopt dat we zouden kunnen bewijzen dat voor $\nu \geq 2$ de kromme $Y \setminus S$ een Teichmüller-kromme is. Helaas hebben we dit niet kunnen bewijzen, en kunnen we slechts gedeeltelijke informatie leveren over dergelijke families.

Het laatste hoofdstuk van dit proefschrift bevat originele resultaten. Het lijkt erop dat voorbeelden van semistabiele families van krommen waarvoor het

directe beeld van de relatieve plurikanonieke schoof een inverteerbare schoof bevat waarvoor gelijkheid in (8) optreedt, niet breed bekend zijn, behalve in de voor de hand liggende gevallen die kunnen worden geconstrueerd voor $\nu = 1$.

Het blijkt dat voor zekere families van krommen die door de complexe eenheidsbal worden geüniformiseerd, er een natuurlijke inverteerbare deelschoof bestaat van het directe beeld van de relatieve bikanonieke schoof. Deze deelschoof kan worden geconstrueerd met behulp van de tweede fundamenteaalkvorm van de familie. We geven een beschrijving van deze deelschoof met behulp van Mok's resultaat over projectieve tweede fundamenteaalkvormen en tautologische foliaties op de projectivering van de raakbundel van vormen van de complex hyperbolische ruimte. Dit zijn quotiënten van de complexe n -eenheidsbal $\mathbb{B}^n$ langs een discrete, co-compacte, torsievrije ondergroep van $\mathrm{PU}(n, 1)$.

Stelling *Zij $f: X = \mathbb{B}^2/\Gamma \rightarrow Y$ een semistabiele familie van krommen, waarbij Γ een discrete, co-compacte, torsievrije ondergroep van $\mathrm{PU}(2, 1)$ is. We nemen aan dat de familie glad is over $Y \setminus S$, dat alle singuliere vezels totaal geodetisch zijn en dat het geslacht van Y groter is dan 1. Dan bestaat er een inverteerbare deelschoof van het directe beeld van de relatieve bikanonieke schoof $f_*\omega_{X/Y}^{\otimes 2}$ waarvoor de Arakelov-gelijkheid geldt in (8).*

Naar aanleiding van dit resultaat en de resultaten van Livné uit [49] presenteren we een aantal voorbeelden van semistabiele families van krommen geüniformiseerd door de complexe 2-bal over modulaire krommen van niveau $N \in \{7, 8, 9, 12\}$. We bewijzen dat alle singuliere vezels in deze families totaal geodetisch zijn. Daarna bewijzen we dat dit voorbeelden zijn van families waarvan de basiskromme, zonder de discriminantlocus, een Teichmüllerkromme is. We merken echter op dat deze voorbeelden van families waarvoor het directe beeld van de relatieve bikanonieke schoof een maximale inverteerbare deelschoof bevat opnieuw afkomen van maximale gevallen waarbij $\nu = 1$.

Een vraag die nog beantwoord moet worden is of elke familie zoals in bovenstaande Stelling een voorbeeld geeft van een Teichmüller-kromme.

Acknowledgement

First and foremost, I would like to thank my advisors Vincent Koziarz and Robin de Jong. In the past few years they invested their time and knowledge generously in order to help me and teach me throughout the research and the writing this thesis.

I am very grateful to Prof. Bas Edixhoven and to the team of the ALGANT program, as well as to the faculty and the administrative staff of the Institute of Mathematics Bordeaux and the Institute of Mathematics Leiden.

I would like to deeply thank professors Xavier Roulleau and Richard Wentworth for accepting to be members of the Doctorate Committee, as well as the members of the jury of my thesis.

I take this opportunity to sincerely acknowledge Prof. Žarko Pavicević for his support and encouragement.

During my thesis I met a lot of new friends who made the adventure of being a PhD student even more interesting and beautiful, je vous remercie mes chers amis et collègues: Zoé, Jonathan, Raphael, Sami, Elza, Nico, Alice, Thomas, Antonin, Roxane, Phillipe, Vasilis, Bianca, Manon, Olga, Mima, Đorđo, Dušan, Carlo, Guillio, Gabriele ... Je remercie mes chers coloc Leo et Fab. Merci Iris!

Hvala vama: Senka, Vojo, Stefane, Dianne, Mirela, Ala, Siniša, Filipe B., Vardane, Filipe Đ., Vera, Saša...

I would like to thank my Montenegrin friends for all those beautiful Montenegrin summers!

Hvala vam moji dragi: Marko, Marina, Gago, Miro, Ivana, Vesna, Tanja, Mićko, Ilija, Sanja, Milice, Izy, Dunja... Hvala mojoj baba Radi!

Na kraju želim da se zahvalim vama Branka i Petre, za svu ljubav i podršku koju mi pružate. Volim vas!

Curriculum Vitae

Nikola Damjanovic was born on February 15, 1988 in Cetinje, Montenegro. He attended elementary school M.M.Burzan and mathematical high school S.Skerovic in Podgorica. After that, he entered the University of Montenegro in 2007 where he got his bachelor degree in mathematics and computer science in 2010.

After finishing his bachelor studies, he joined the ALGANT Master program. He spent the first year of the program at the University of Bordeaux, and went on to spend the second year at the University of Milan. He graduated from the program in 2012, with his master thesis "Automorphisms on K3 surfaces", which was supervised by Prof. Lambertus Van Geemen. He obtained a joint master diploma from the University of Bordeaux and the University of Milan.

Following master studies, Nikola worked at the rectorate of the University of Montenegro and then he started ALGANT PhD program, working on a joint project between the University of Bordeaux and the University of Leiden, supervised by professors Vincent Koziarz and Robin de Jong. During his PhD thesis Nikola has been working on a subject connected to the theory of Arakelov inequalities, Higgs bundles and ball quotients. As a PhD student Nikola has been teaching at the University of Bordeaux. Nikola is now living in Bordeaux, where he works for a french IT company.