Discrete tomography for integer-valued functions

Stolk, A.P.

Stellingen

Behorende bij het proefschrift

Discrete tomography for integer-valued functions

door Arjen Stolk

Zij gegeven een deelverzameling A van $\mathbb{Z}^r$ en een rijtje richtingen $D = (d_1, \ldots, d_n)$ zodat $d_i \in \mathbb{Z}^r$ voor alle i, d_i is *primitief* (i.e. geen veelvoud van een andere vector) voor alle i en d_i en d_j zijn onafhankelijk als $i \neq j$. Zij L de verzameling lijnen in de richtingen d_1 tot en met d_n die door tenminste één punt van A gaan. Zij T de groep van functies $f : A \to \mathbb{Z}$ die maar op eindig veel plaatsen niet nul zijn en zij P de groep van functies $g : L \to \mathbb{Z}$ die maar op eindig veel plaatsen niet nul zijn.

De *lijnsom afbeelding* behorende bij (A, D) is de afbeelding $p : T \to P$ die een $f : A \to \mathbb{Z}$ stuurt naar de afbeelding $\ell \mapsto \sum_{x \in \ell \cap A} f(x)$. Met andere woorden, de waarde die wordt toegekend aan een lijn is de som van de waardes die horen bij de punten op die lijn.

1. Zij $A = \mathbb{Z}^r$ en D zoals hierboven. Dan is er een $f \in P$ zodanig dat $p(f) = 0$ en dat elke f' met $p(f') = 0$ kan worden geschreven als een lineaire combinatie van getransleerden van f.

2. Zij $A = \mathbb{Z}^2$ en D zoals hierboven. Dan is er een eindige verzameling lineaire afbeeldingen $r_1, \ldots, r_t : P \to \mathbb{Z}$ zodat voor elke $g \in T$ geldt dat $r_i(g) = 0$ voor alle i dan en slechts dan als er een $f \in T$ is met $p(f) = g$.

3. Er bestaat een algoritme om gegeven D als hierboven een verzameling $r_1, \ldots, r_t$ zoals in stelling 2 uit te rekenen. In het bijzonder is het mogelijk de afbeeldingen r_i op eindige wijze te beschrijven.

4. Voor $A = \mathbb{Z}^r$ met $r \geq 3$ en D als hierboven is het niet duidelijk wat bruikbare generalisaties van stellingen 2 en 3 zijn.

5. Zij $A \subset \mathbb{Z}^r$ eindig convex en D zoals hierboven. Dan is er een eindige verzameling lineaire afbeeldingen $r_1, \ldots, r_t : P \to \mathbb{Z}$ zodat voor elke $g \in T$ geldt dat $r_i(g) = 0$ voor alle i dan en slechts dan als er een $f \in T$ is met $p(f) = g$.

6. Zij L een ondergroep van $\mathbb{Z}^r$ van eindige index. Zij $A \subset \mathbb{Z}^r$ met de eigenschap dat $a + \ell \in A$ voor alle $a \in A$ en $\ell \in L$. Zij D zoals hierboven. Dan is er een eindige verzameling lineaire afbeeldingen $r_1, \ldots, r_t : P \to \mathbb{Z}$ en een ondergroep $H \subset \mathbb{Z}^t$ zodanig dat voor elke $g \in T$ geldt dat $(r_i(g))_{i=1}^t \in H$ dan en slechts dan als er een $f \in T$ is met $p(f) = g$. Er bestaat een algorithme om, gegeven A, L en D, afbeeldingen $r_1, \ldots, r_t$ en de ondergroep H uit te rekenen.

7. Gegeven een functie $f : \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}$ die bijna overal 0 is, definiëren we de discrete Radon-transformatie (DRT) van f als de functie

$$\begin{aligned} R_f : \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid \mathrm{ggd}(a,b) = 1\} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ ((a,b),c) &\longmapsto \sum_{\substack{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \\ bx-ay=c}} f(x,y). \end{aligned}$$

Voor $n \geq 0$ geheel definiëren we de n-de momentfunctie van de DRT als

$$\begin{aligned} R_f^{(n)} : \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid \mathrm{ggd}(a,b) = 1\} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (a,b) &\longmapsto \sum_{c\in\mathbb{Z}} c^n R_f((a,b),c). \end{aligned}$$

Er geldt dat $R_f^{(n)}$ een homogeen polynoom van graad n in a en b is.

Gemotiveerd door de consistentie-voorwaarden van Helgason en Ludwig voor de Radon-transformatie in de continue tomografie is het redelijk te vermoeden dat onder geschikte voorwaarden op een functie

$$G : \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid \mathrm{ggd}(a,b) = 1\} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

deze eis op de moment-functies van G ook voldoende is voor het bestaan van een functie f zodanig dat $R_f = G$.

8. Een positief geheel getal N heet een Koster-getal in basis B wanneer het kan worden verkregen door elementaire rekenkundige operaties (som, verschil, product, en opgaande deling) uit de getallen 1 tot en met $B - 1$, waarbij elk getal precies tweemaal zo vaak gebruikt wordt als het voorkomt in de B-aire expansie van het getal N.

   Voor elke basis $B \geq 4$ zijn er oneindig veel Koster-getallen met basis B.

9. De verdediging van het proefschrift is *de facto* een louter ceremoniële aangelegenheid en zou als zodanig niet verplicht moeten zijn voor het behalen van de doctorstitel.

10. Er is meer wiskundig inzicht nodig voor het oplossen van een sudoku dan voor het oplossen van een kwadratische vergelijking.