Explicit computations with modular Galois representations

Bosman, J.G.

Stellingen

behorende bij het proefschrift
'Explicit computations with modular Galois representations'
van Johan Bosman

1. Laat K het splijtlichaam van het polynoom

$$x^{17}-5x^{16}+12x^{15}-28x^{14}+72x^{13}-132x^{12}+116x^{11}-74x^{9}$$
$$+90x^{8}-28x^{7}-12x^{6}+24x^{5}-12x^{4}-4x^{3}-3x-1$$

over $\mathbb{Q}$ zijn. De worteldiscriminant van K is kleiner dan $8\pi e^{\gamma}\approx 44.76$. Onder de aanname van de Gegeneraliseerde Riemannhypothese zijn er derhalve op isomorfie na slechts eindig veel getallenlichamen met een nog kleinere worteldiscriminant.

2. Het volgende polynoom heeft $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{32})$ als Galoisgroep:

$$x^{33}+13x^{32}+108x^{31}+744x^{30}+4768x^{29}+27172x^{28}+132412x^{27}$$
$$+569936x^{26}+2254864x^{25}+8014936x^{24}+24146112x^{23}+58070720x^{22}$$
$$+103024676x^{21}+105307300x^{20}-50671036x^{19}-451423176x^{18}$$
$$-931969758x^{17}-950145182x^{16}+258579596x^{15}+3324485088x^{14}+8626891432x^{13}$$
$$+15770332836x^{12}+21389501380x^{11}+14825199448x^{10}-13660027232x^{9}$$
$$-54239325496x^{8}-68496746608x^{7}-35204682152x^{6}+25928111596x^{5}$$
$$+49552492980x^{4}+32492001580x^{3}-3814250752x^{2}-11970016119x-5786897139.$$

3. Zij $\tau(n)$ de Ramanujan tau-functie, gedefiniëerd door de machtreeksidentiteit

$$q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24}=\sum_{n\geq 1}\tau(n)q^n.$$

Voor elk positief geheel getal $n<22798241520242687999$ geldt $\tau(n)\neq 0$.

4. Het is mogelijk om een proefschrift in de arithmetische meetkunde te schrijven waarin geen exacte rijtjes staan en dit met succes te verdedigen.

5. Zij p een priemgetal en zij $f\in\mathbb{Z}[x]$ een monisch irreducibel polynoom. Als $|f(0)|$ geen p-demacht van een geheel getal is, dan is het polynoom $f(x^p)$ eveneens irreducibel.

6. Zij $n \geq 3$ een geheel getal en laat $P_1, \ldots, P_n$ de hoekpunten van een regelmatige n-hoek zijn, gelegen op een cirkel C met straal R. Voor elk punt Q op C en elke $m \in \{0, \ldots, n-1\}$ geldt dan

$$|P_1Q|^{2m} + \cdots + |P_nQ|^{2m} = R^{2m}\binom{2m}{m}n.$$

(*Nieuw Archief voor Wiskunde 5/2 (2001) no. 1, 87–88*)

7. Zij N een positief geheel getal en zij $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ een niet-triviaal Dirichletkarakter. Definieer $s : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ door $s(n) = \sum_{k=0}^{n} \chi(k)$, waarbij $\chi(k) = 0$ wordt verondersteld voor $\mathrm{ggd}(k, N) > 1$. Laat nu een geheel getal $m > 1$ gegeven zijn met $\mathrm{ggd}(m, N) = 1$ en zij $m' \in \mathbb{Z}_{<0}$ een multiplicatieve inverse van m mod N. Dan geldt

$$\sum_{k=0}^{m-1} s(-km') = \frac{m - \chi(m')}{N} \sum_{k=0}^{N} s(k).$$

(*J. G. Bosman en L. Taelman, Nieuw Archief voor Wiskunde 5/2 (2001) no. 2, 133–134*)

8. Zij $n \geq 6$ een geheel getal en laat een verzameling van n punten in het vlak gegeven zijn met de eigenschap dat de afstand tussen elk tweetal punten minstens 1 is. Dan heeft deze verzameling een deelverzameling bestaande uit $\lfloor \frac{n+9}{7} \rfloor$ punten met de eigenschap dat de afstand tussen elk tweetal punten minstens $\sqrt{3}$ is.
(*J. G. Bosman en L. Taelman, Nieuw Archief voor Wiskunde 5/9 (2008) no. 1, 305–306*)

9. Wanneer een maatschappelijk probleem wordt toegeschreven aan slecht beleid, heeft hoogstwaarschijnlijk niet de lage kwaliteit maar juist de hoge kwantiteit van het beleid het probleem veroorzaakt.

10. Als men aan een willekeurige groep mensen vraagt of de meerderheid gelijk heeft, dan zal meestal een meerderheid van de ondervraagden met ‘nee’ antwoorden.